数学3.7

日期: / 3.7 参数估计

3.7.5 设 0, 1, 0, 1, 1 为来自两点分布总体 $B(1, p)$的样本观测值，求未知参数 p 的矩估计值。

解 由 $X \sim B(1,p) \Rightarrow E(X)=p$

由矩估计法计算公式 $\hat{E}(X)=\overline{X}=\hat{p}$，所以 $\hat{p}=\overline{X}$

则 $\hat{p}=\frac{1}{5}(0+1+0+1+1)=\frac{3}{5}$

3.7.8 某种袋装食品的重量服从正态分布. 某一天随机地抽取 9 袋检验, 重量(单位:g)为:

510 485 505 505 490 495 520 515 490

(1) 若已知总体方差 $\sigma^2=8.6^2$, 求 μ 的置信度为 90%的置信区间;

(2) 若已知总体方差未知, 求 μ 的置信度为 95%的置信区间.

解 (1) 设食品重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 8.6^2$, $n=9$ $\alpha = 0.1$

选统计量 $U = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \boxed{N(0,1)}$

$$P\left(-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha = 0.9$$

$$\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) - \Phi(-u_{\frac{\alpha}{2}}) = 0.9$$

查表得 $u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.05} = 1.645$

$$\overline{X} = \frac{1}{9}(510+485+\cdots+490) = 510.67$$

则总体均值 μ 的置信度 90% 区间是

$$\left(\overline{X} - u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(501.67 - 1.645 \times \frac{8.6}{\sqrt{9}},\ 501.67 + 1.645 \times \frac{8.6}{\sqrt{9}}\right)$$

$$= (496.95,\ 506.38)$$

日期: /

(2) 若方差未知，设食品重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$n=9$ $\alpha=0.05$

选统计量 $T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha = 0.95$$

$$P\left(T > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

查表得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$

$$\bar{x} = \frac{1}{9}(510 + \cdots + 490) = 501.67$$

$$s^2 = \frac{1}{8}\left[(510-501.67)^2 + \cdots + (490-501.67)^2\right] = 12.25^2$$

即 $s = 12.25$

总体均值 μ 的置信度 95% 的置信区间是

$$\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(501.67 - 2.306 \times \frac{12.25}{\sqrt{9}},\ 501.67 + 2.306 \times \frac{12.25}{\sqrt{9}}\right)$$

$$= (492.25,\ 511.08)$$

3.7.10 从某一班中随机抽取了 16 名女生进行调查. 她们平均每个星期花费 13 元吃零食, 样本标准差为 3 元, 求此班所有女生每个星期平均花费在吃零食上的钱数的 95%的置信区间.(假设总体服从正态分布)

解 设花费 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\boxed{\sigma^2 \text{未知}}$, $n=16$ $\alpha=0.5$

选取统计量 $T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha = 0.95$$

$$P\left(T > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

查表得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(15) = 2.1315$

由题意得 $\bar{X} = 13$ $S = 3$

则总体均值 μ 的置信度为 95% 的置信区间是

$$\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(13 - 2.1315 \times \frac{3}{\sqrt{16}},\ 13 + 2.1315 \times \frac{3}{\sqrt{16}}\right)$$

$$= (11.40,\ 14.60)$$

3.7.11 一家轮胎工厂在检验轮胎质量时抽取了 400 条轮胎作试验，其检查结果这些轮胎的平均行驶里程是 20000*km*，样本标准差为 6000*km*. 试求这家工厂的轮胎的平均行驶里程的置信区间，可靠度为 95%.

解 设行驶里程 X，σ^2 未知，$n=400$，$\alpha=0.05$

选取统计量 $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\boxed{\sim N(0,1)}$

$P\left(-u_{\frac{\alpha}{2}}<\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<u_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha=0.95$

查表得 $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$

由题意得 $\bar{x}=20000$ $S=6000$

则总体均值 μ 的置信度为 95% 的置信区间是

$\left(\bar{x}-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$

$=\left(20000-1.96\times\dfrac{6000}{\sqrt{400}},\ 20000+1.96\times\dfrac{6000}{\sqrt{400}}\right)$

$=(19412,\ 20588)$

3.7.12 随机抽取某牌香烟 8 支，其尼古丁平均含量为 3.6mg，样本标准差为 0.9mg。试求此牌香烟尼古丁平均含量 μ 的置信度为 95% 的置信区间（假定尼古丁含量服从正态分布）。

解 设尼古丁含量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 未知 $\alpha = 0.05$

选取统计量 $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim \boxed{t(n-1)}$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha = 0.95$$

$$P(T > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

查表得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.025}(7) = 2.3646$

由题意得 $\bar{X} = 3.6$ $S^2 = 0.9^2$

则总体均值 μ 的置信度为 95% 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left(3.6 - 2.3646 \times \frac{0.9}{\sqrt{8}},\ 3.6 + 2.3646 \times \frac{0.9}{\sqrt{8}}\right)$$

$$= (2.848, 4.352)$$

3.7.14 为了比较两种型号步枪的枪口速度，随机地取甲型子弹 100 发，算得枪口子弹的平均值 $\bar{x}$=500(m/s)，样本标准差 s_1=1.10(m/s)；随机地取乙型子弹 120 发，得枪口速度平均值 $\bar{y}$=496(m/s)，样本标准差 s_2=1.20(m/s)。设两总体近似地服从正态分布，求两总体均值之差的置信水平为 95%的置信区间.

解 设甲型子弹的速度 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 乙型子弹的速度 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

总体方差未知，$n_1=100$ $n_2=120$ $\alpha=0.05$

选取统计量 $Z=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1}+\dfrac{S_y^2}{n_2}}}$ 近似服从 $N(0,1)$

则 $P\left(-u_{\frac{\alpha}{2}}<\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1}+\dfrac{S_y^2}{n_2}}}<u_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha=0.95$

$\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})-\Phi(-u_{\frac{\alpha}{2}})=0.95$

查表得 $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$

$\bar{x}=500$ $S_x=1.1$ $\bar{y}=496$ $S_y=1.2$

则总体均值 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 95% 的置信区间是

$\left(\bar{x}-\bar{y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1}+\dfrac{S_y^2}{n_2}},\ \bar{x}-\bar{y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1}+\dfrac{S_y^2}{n_2}}\right)$

$=\left(4-1.96\times\sqrt{\dfrac{1.1^2}{100}+\dfrac{1.2^2}{120}},\ 4+1.96\times\sqrt{\dfrac{1.1^2}{100}+\dfrac{1.2^2}{120}}\right)$

$=(3.696,\ 4.304)$

3.7.15 为了估计参加业务训练的效果. 某公司抽了 50 名参加过训练的职工进行水平测验, 结果是平均得分为 4.5, 样本方差为 1.8; 抽了 60 名未参加训练的职工进行水平测验, 其平均得分为 3.75, 样本方差为 2.1. 试求两个总体均值之差的 95%的置信区间. (设两个总体均服从正态分布).

解 设参加训练得分 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, 未参加训练 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

由题意 $n_1=50 \quad n_2=60 \quad \alpha=0.05$

取统计量 $Z=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n_1}+\dfrac{S_Y^2}{n_2}}}$ 近似服从 $N(0,1)$

则 $P\left(-u_{\frac{\alpha}{2}}<\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n_1}+\dfrac{S_Y^2}{n_2}}}<u_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha=0.95$

故 $\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})-\Phi(-u_{\frac{\alpha}{2}})=0.95$

查表 $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$

代入 $\bar{X}=4.5 \quad S_1^2=1.8 \quad \bar{Y}=3.75 \quad S_2^2=2.1$

则总体均值 $\mu_1-\mu_2$ 95%置信区间是

$\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n_1}+\dfrac{S_Y^2}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n_1}+\dfrac{S_Y^2}{n_2}}\right)$

$\Rightarrow (0.228,\ 1.272)$