3.6 抽样分布 参考答案

3.6.5 从$X \sim N(63,49)$中随机抽取容量为 n=9 的样本，求样本均值 $\overline{X}$ 小于 60 的概率.

解 因为$X \sim N(63,49)$，n=9，所以有

$$\overline{X} \sim N\left(63,\frac{49}{9}\right) = N\left(63,\left(\frac{7}{3}\right)^2\right)$$

$$即 \quad \frac{\overline{X}-63}{7/3} \sim N(0,1)$$

所以 $$P(\overline{X} < 60) = P\left(\frac{\overline{X}-63}{\frac{7}{3}} < \frac{60-63}{\frac{7}{3}}\right)$$

$$= \Phi\left(-\frac{9}{7}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{9}{7}\right) = 0.0985$$

注：本题正确率较高，同学们注意解题过程书写规范.

3.6.8 某类钢丝的抗拉强度服从正态分布，平均值为 100，标准差为 5.48

（1）求容量为 100 的样本均值的数学期望与标准差；

（2）从总体中抽出 16 个数据作简单随机样本，求这一样本的均值介于 99.8 到 100.9 之间的概率.

解 （1）因为$X \sim N(100, 5.48^2)$，$n = 100$，$\overline{X} \sim N\left(100,\frac{5.48^2}{100}\right)$

所以样本均值 $\overline{X}$ 的数学期望和标准差分别为

$$E(\overline{X}) = 100, D(\overline{X}) = \frac{5.48^2}{100} = 0.548^2, \sigma(\overline{X}) = 0.548$$

（2）因为$X \sim N(100, 5.48^2), n = 16, \overline{X} \sim N\left(100,\frac{5.48^2}{16}\right)$

$$即 \quad \frac{\overline{X}-100}{5.48/4} \sim N(0,1)$$

所以 $$P(99.8 < \overline{X} < 100.9) = P\left(\frac{99.8-100}{5.48/4} < \frac{\overline{X}-100}{5.48/4} < \frac{100.9-100}{5.48/4}\right)$$

$$= P\left(-0.15 < \frac{\overline{X}-100}{5.48/4} < 0.66\right) = \Phi(0.66) - \Phi(-0.15) = 0.305$$

注：本题出错同学比较少，同学们注意，试题要求写出来的都要写出来，并且看清楚是写方差还是标准差，有些同学第一问的标准差写成了方差，有些同学只

写了数学期望；第二问注意解题过程.

3.6.10 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2),(X_1,X_2,...,X_n)$ 是一样本，样本均值 $\overline{X}$

（1）设 n=25，求$P(\mu-0.2\sigma<\overline{X}<\mu+0.2\sigma)$；

（2）要使$P(|\overline{X}-\mu|>0.1\sigma)\leq 0.05$，问 n 至少应该等于多少？

解 （1）因为$X\sim N(\mu,\sigma^2),n=25$，所以 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{25}\right)$，即$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/5}\sim N(0,1)$，

所以 $$P(\mu-0.2\sigma<\overline{X}<\mu+0.2\sigma)$$

$$=P\left(\frac{\mu-0.2\sigma-\mu}{\sigma/5}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/5}<\frac{\mu+0.2\sigma-\mu}{\sigma/5}\right)$$

$$=P\left(-1<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/5}<1\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=0.6826$$

（2）因为 $$P(|\overline{X}-\mu|>0.1\sigma)=1-P(|\overline{X}-\mu|\leq 0.1\sigma)$$

$$=1-P\left(\frac{-0.1\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{0.1\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$=1-P\left(-0.1\sqrt{n}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<0.1\sqrt{n}\right)=1-\Phi(0.1\sqrt{n})+\Phi(-0.1\sqrt{n})\leq 0.05$$

即 $\Phi(0.1\sqrt{n})\geq 0.975$，$0.1\sqrt{n}\geq 1.96$，

因此 n≥384.16，n 至少应该等于 385.

注：本题第一问正确率较高，第二问有少数同学出错，算到 384.16 时要注意，所求 n 应取 385.

3.6.13 设$X\sim N(200,20^2),Y\sim N(180,30^2)$，从 X、Y 中各抽取 10 个计算出样本均值为$\overline{X}$和$\overline{Y}$，求$\overline{X}-\overline{Y}\leq 0$ 的概率.

解 因为$X\sim N(200,20^2),Y\sim N(180,30^2)$，$n_1=10$，$n_2=10$，

所以 $$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(200-180)}{\sqrt{\frac{20^2}{10}+\frac{30^2}{10}}}\sim N(0,1)$$

因此 $$P(\overline{X}-\overline{Y}\leq 0)=P\left(\frac{\overline{X}-\overline{Y}-20}{\sqrt{130}}\leq\frac{0-20}{\sqrt{130}}\right)$$

$$=\Phi\left(-\frac{20}{\sqrt{130}}\right)=1-\Phi(1.75)=0.04$$

注：本题正确率较高，做错的同学参照过程及时复习知识点.

3.6.14 在一个长时期内，职业介绍所发现一个职业申请人接受一项才能测验（所有申请人都要经过此项测验）所需要的平均时间为 24.5min，标准差为 45min.

（1）今从这个总体中选取容量为 81 的简单随机样本，求该样本均值的数学期望和方差；

（2）在（1）的样本中，样本均值大于 25min 的概率有多大？

解（1）设测试时间为 X，其数学期望$EX=\mu=24.5(\text{min}), DX=\sigma^2=45^2, n=81$,

所以 $$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=24.5$$

$$D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{81}\times 45^2=25$$

（2）$n=81$，由中心极限定理可知

$$\overline{X}\sim N\left(24.5,\frac{45^2}{81}\right)=N(24.5,25)$$

即 $$\frac{\overline{X}-24.5}{5}\sim N(0,1)$$

因此 $$P(\overline{X}>25)=1-P\left(\frac{\overline{X}-24.5}{5}<\frac{25-24.5}{5}\right)$$

$$=1-\Phi(0.1)=0.4602$$

注：本题第一小问，个别同学在计算方差时出错，注意运用公式，要及时巩固知识点；第二问正确率较高.

本次作业同学们普遍完成都比较好，希望同学们仔细看一下解题步骤，规范自己的解题习惯，如果在做作业的过程中遇到模糊知识点，一定要按时复习，相信大家都能够很好掌握！