3.4 随机变量及其分布 参考答案

3.4.1 设某种零件的合格品率为 0.9，不合格品率为 0.1，现对这种零件逐一有放回地进行测试，直到测得一个合格品为止，求测试次数的分布律.

解 测试次数 X 的可能取值为 1,2，…

且 $P(X=k)=0.1^{k-1}\times 0.9, k=1,2,\cdots$

注：本题错误人数较少，有误的同学注意及时复习基本概念

3.4.2 有 3 个小球和 2 只杯子，将小球随机放入杯中，设 X 为有小球的杯子数，求 X 的概率分布.

解 X 的可能取值为 1,2

且 $P(X=1)=\frac{C_3^1}{2^3}=\frac{1}{4}, P(X=2)=\frac{C_3^1C_2^1}{2^3}=\frac{3}{4}$.

注：本题错误情况有两种，部分同学得到的结果是1/8和7/8，这部分同学要注意，每个小球选择杯子的概率是1/2，但是两只杯子也是不同的；部分同学得到的结果是1/2和1/2，这部分同学要注意，杯子和小球都是不同的。有误的同学要好好想想，多做几道类似题目。

3.4.3 盒中有 5 个球，其标号分别为 1,2,3,4,5，从中任取 3 个，求取得球中最大号码数 X 的概率分布.

解 X 的所有可能取值为 3,4,5，相应概率为

$P(X=3)=\frac{1}{C_5^2}=\frac{1}{10}, P(X=4)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}, P(X=5)=\frac{C_4^2}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

注：本题几乎没有同学有误，在写出最终结果时最好约分一下

3.4.4 一袋中有 8 个球：5 个红的，3 个白的.每次从中任取一个.有下述两种方法进行抽取，X 表示直到取得红球为止所进行的抽取次数，求随机变量 X 的概率分布.（1）不放回地抽取；（2）有放回地抽取.

解 （1）X 的可能取值为 1,2,3,4

$P(X=1)=\frac{5}{8}, P(X=2)=\frac{15}{56}, P(X=3)=\frac{5}{56}, P(X=4)=\frac{1}{56}$

（2）X 的可能取值为 1,2，…

$$P(X=k)=\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{8}\right),k=1,2,\cdots$$

注：本题正确率较高

3.4.5 设随机变量 X 的概率分布为 $P(X=k)=\frac{k}{15}\quad k=1,2,3,4,5$

求$P(1/2<X<5/2)$的值.

解　$P(1/2<X\le 5/2)=1/15+2/15=1/5$

注：本题正确率较高

3.4.6 设随机变量 X 的分布律为$P(X=k)=\frac{a}{N}\quad(k=1,2,...,N)$，$a$的值为多少？

解　利用概率分布律的性质：

$$\underbrace{a/N+a/N\cdots+a/N}_{N}=1$$

可得a =1

注：本题正确率较高

3.4.9 设随机变量 X 的可能取值为-1,0,1，相应的概率依次为 p1,p2,p3，已知三个概率成等差数列，且 p3=2p1,求 X 的概率分布.

解　由概率分布性质及已知条件

$p_1+p_2+p_3=1$, $p_2-p_1=p_3-p_2$, $p_3=2p_1$

解得$P_i=\frac{1+i}{9}$, 即 $P(X=-1)=\frac{2}{9},P(X=0)=\frac{1}{3},P(X=1)=\frac{4}{9}$

注：本题有几名出错误的同学，三个概率是依次成等差数列，不要想太多了，大部分同学做的都是正确的

3.4.12 设随机变量 ζ 的概率分布为：

$$P(\xi=k)=c/(2+k),k=0,1,2,3$$

求 c 值和下列概率：（1）P（ζ=3）；（2）P（ζ<3）；（3）P（ζ=2 或 ζ=3）.

解　由概率分布性质可知 c/2+c/3+c/4+c/5=1

解得 $c=\frac{60}{77}$

(1)P(ζ=3)= $\frac{12}{77}$

(2)P(ζ<3)=P(ζ=0)+P(ζ=1)+P(ζ=2)= $\frac{65}{77}$

(3)P(ζ =2 或 ζ =3)=P(ζ =2)+P(ζ =3)= $\frac{27}{77}$

注：本题正确率较高

3.4.14 随机变量 X 的分布密度为$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$，则 X 落在区间（-1/2,1/2）内的概率为多少？

解　由密度函数性质$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$ 可知

$$\int_{-1}^{1}\frac{c}{\sqrt{1-x^2}}dx=1 \text{ 解得 } c=\frac{1}{\pi},$$

$$P\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{c}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{3}.$$

注：本题考察密度函数性质以及概率计算，在计算时用到简单的积分知识，难度不大，同学们注意计算不要出错，本题总体正确率比较高

3.4.15 已知随机变量 X 的密度函数为$f(x)=\begin{cases}x & 0\leq x<1\\ 2-x & 1\leq x<a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，

（1）求 a 的值；（2）求 P（X<0.5）,P(X>1.3),P(0.2<X<1.2).

解　（1）由密度函数性质$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ 可得

$$\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{a}(2-x)dx=1\text{，解得 } a=2.$$

（2）$P(X<0.5)=\int_{-\infty}^{0.5}f(x)dx=\int_{0}^{0.5}xdx=0.125$

$$P(X>1.3)=\int_{1.3}^{+\infty}f(x)dx=\int_{1.3}^{2}(2-x)dx=0.245$$

$$P(0.2<X<1.2)=\int_{0.2}^{1.2}f(x)dx=\int_{0.2}^{1}xdx+\int_{1}^{1.2}(2-x)dx=0.66$$

注：本题和上题类似，注意计算细心，同学们做的都比较好

3.4.17 设随机变量 X 的密度函数为$f(x)=\begin{cases}ax+b, & 1<x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，又知 P(2<X<3)=2P(-1<X<2),求常数 a 及 b 的值.

解　由密度函数性质及已知条件可得

$$\int_1^3 (ax+b)dx = 1 \text{ 和 } \int_2^3 (ax+b)dx = 2\int_1^2 (ax+b)dx$$

解得 $a=\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{6}$

注：本题正确率较高

3.4.18 设连续型随机变量 X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi(1+x^2)}, & a<x<+\infty \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

（1）试确定常数 a 的值.（2）如果概率 P（a<x<b）=0.5,确定常数 b 的值.

解 （1）由密度函数性质可知$\int_a^{+\infty}\frac{2}{\pi(1+x^2)}dx=1$，得到 a=0；

（2）由已知条件$\int_0^b\frac{2}{\pi(1+x^2)}dx=0.5$，得 b=1.

注：本题正确率较高

3.4.20 设产品寿命（单位为小时）的分布密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{A}{x^2}, & 1000\le x\le 2000 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：（1）A=?(2)产品寿命超过 1500 小时的概率；（3）某设备上装有三个这样的产品，当三个产品均失效时，则设备不能正常工作；当恰有二个产品失效时，设备正常工作的概率为 20%;当恰有一个产品失效时,设备正常工作的概率是 80%;当三件产品均有效时,设备正常工作的概率为 1.计算设备累计工作 1500 小时后,仍能正常工作的概率.

解 （1）由密度函数性质可知，$\int_{1000}^{2000}\frac{A}{x^2}dx=1$ 得 $A=2000$；

（2）$P(X>1500)=\int_{1500}^{2000}\frac{A}{x^2}dx=\frac{1}{3}$;

（3）相当于三重伯努利试验，每次试验中事件 A（即每个产品有效）的概率为 1/3，再利用全概率公式，因此设备累计工作 1500 小时后能正常工作的概率为：$p=0.2\times C_3^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^1+0.8\times C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+1\times C_3^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=0.304$

注：本题第三小问有几名同学算错，大家的思路普遍没什么问题，只要细心，列出计算式并不困难，但由于计算稍微繁琐，一些同学式子列对了但是结果算错了，

考试中就非常可惜，一定要细心呀！

3.4.22 随机变量$X\sim N(2,\sigma^2)$，且满足 P（0<X<4）=0.3,求 P(X<0).

解 $\boldsymbol{P(X<0)=\frac{1}{2}(1-P(0<X<4))=0.35}$

注：本题正确率较高

3.4.23 从甲地到乙地有两条路可走，第一条路路程较短，但交通拥挤，所需时间（单位：min）$X\sim N(50,10^2)$；第二条路路程较长，但较通畅，所需时间$\boldsymbol{Y}\sim N(60,4^2)$。试问，如要求在 65min 内到达乙地，应走哪一条路线？

解 走第一条路能在 65min 内到达乙地的概率：$X\sim N(50,10^2)$

$$P(X<65)=P\left(\frac{X-50}{10}<\frac{65-50}{10}\right)=\Phi(1.5)=0.9332$$

走第二条路能在 65min 内到达乙地的概率：$Y\sim N(60,4^2)$

$$P(Y<65)=P\left(\frac{Y-60}{4}<\frac{65-60}{4}\right)=\Phi(1.25)=0.8944$$

$$P(X<65)>\quad P(Y<65)$$

所以，如要求在 65min 内到达乙地，应走第一条路线

注：本题其实就是计算走两条路线能准时到达的概率分别是多少，正确率较高

3.4.25 某公司计划招工 100 人，其中正式工 80 人，临时工 20 人。规定进行三项考试，满分为 300 分，实际报考的有 693 人，考试成绩服从正态分布，考试总平均成绩为 198 分，265 分以上的有 14 人。（1）预测最低录取分数线（2）若按总分从高到低录取，有一考生总分是 237 分，试分析他被录取为正式工的可能性。

解 由已知条件知，考试成绩$X\sim N(198,\sigma^2)$，且$P(X>265)=\frac{14}{693}$,

而 $P(X>265)=1-P(X\leq 265)=1-P\left(\frac{X-198}{\sigma}\leq\frac{265-198}{\sigma}\right)$

所以 $1-\Phi\left(\frac{67}{\sigma}\right)=\frac{14}{693}$

查表得到 $\sigma\approx 32.68$

（1）设最低录取分数为x_0 ， $P(X > x_0) = 1 - P(X \le x_0) = \frac{100}{693}$

$$P(X \le x_0) = 1 - \frac{100}{693} = 0.8559$$

查表得到：$\frac{x_0 - 198}{\sigma} = 1.06$

所以最低录取分数线为 233 分；

（2） $P(X > 237) = 1 - P(X \le 237) = 1 - P\left(\frac{X-198}{\sigma} \le \frac{237-198}{\sigma}\right)$

$$=1 - \Phi\left(\frac{39}{\sigma}\right) = 0.117$$

成绩高于 237 分的人数为 0.117 × 693 = 81.08，多于 80 人，因此此人被录取为正式工的可能性不大。

注：本题第一问基本没有问题，第二问出错的同学比较多，这里参考答案给出的方法是计算成绩高于 237 分的人数看此人能否被录取，有些同学通过计算分数的方法也是可以的，此处需要注意，在概率类题目中一般不用绝对性质的“一定不会”“不可能”字样来回答问题，最好回答成“可能性不大”这类回答。