3.3 条件概率与全概率公式

3.3.1 袋中有 7 只球，其中 5 只红球，2 只白球，每次从中任取一球，不放回地连续取两 次，则第一次取到白球，第二次取到红球的概率是多少?

解 设 A=“第一次取到白球”，B=“第二次取到红球”，

$P(A)=2/7$，$P(B|A)=5/6$，

因此所求概率为 $P(AB)=P(A)P(B|A)=2/7\times5/6=5/21$。

（本题错误人数 5 ）错因：与条件概率混淆，错误的同学仔细读题。

3.3.2 袋中有 7 只球，其中 5 只红球，2 只白球，每次从中任取一球，不放回地连续取两次，则取到的两个球颜色相同的概率是多少?

解 设 A=“第一次取到白球”，B=“第二次取到白球”，

$P(A)=2/7$，$P(B|A)=1/6$，

$P(\bar{A})=\frac{5}{7}$，$P(\bar{B}\mid\bar{A})=\frac{4}{6}$，

取到两球颜色相同即取到两红球或取到两白球，

即 $P(AB+\bar{A}\bar{B})=P(AB)+P(\bar{A}\bar{B})$

$$=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(\bar{B}\mid\bar{A})=\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{11}{21}。$$

（错误人数：5 ）。题目为连续且不放回，可知使用条件概率公式计算，例如，连续不放回取出两个小球即为在先取出一个白球的条件下，再取出一个白球。

3.3.3 设 A、B 为两个随机事件，已知 $P(A)=P(B)=1/3$，$P(A|B)=1/6$，求 $P(\overline{A}|\overline{B})$。

解 $P(A|B)=P(AB)/P(B)$，解得 $P(AB)=1/18$，

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2/3-1/18=11/18$，

因此 $P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A+B)=7/18$，

从而 $P(\overline{A}|\overline{B})=P(\overline{A}\,\overline{B})/P(\overline{B})=7/12$。

(错误人数：7)错因：计算 P（$\overline{A}\overline{B}$）时出现错误

3.3.4 已知 $P(A)=1/4$，$P(B|A)=1/3$，$P(A|B)=1/2$，求 $P(A+B)$。

解 $P(B|A)=P(BA)/P(A)=1/3$，得

$P(BA)=1/12$，$P(A|B)=P(BA)/P(B)=1/2$ 得 $P(B)=1/6$，

所以 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=1/4+1/6-1/12=1/3$。

错误人数：3

3.3.6 有甲、乙两袋，甲袋中有 3 只白球，2 只黑球；乙袋中有 4 只白球，4 只黑球。现从 甲袋中任取两球放入乙袋，然后再从乙袋任取一球，求取到的球是白球的概率。

解 设 A_1="从甲袋中取出 2 个白球"，

A_2="从甲袋中取出 1 个白球 1 个黑球"，

A_3="从甲袋中取出 2 个黑球"，

B="最后取出白球"

$$P(B|A_1)=\frac{3}{5},\quad P(B|A_2)=\frac{1}{2},\quad P(B|A_3)=\frac{2}{5},$$

$$P(A_1)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10},\quad P(A_2)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10},\quad P(A_3)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10},$$

由全概率公式：

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)。$$

$$=\frac{3}{10}\times\frac{3}{5}+\frac{6}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\times\frac{2}{5}=\frac{13}{25}。$$

（错误人数）：7 错因：部分同学写过程一步到位很容易把自己绕晕。

解题思路：分步求每一次在甲袋中去取球放入乙袋的情况，再求解。

3.3.8 有甲、乙两台机床。已知甲机床出故障的概率为 0.06，乙机床出故障的概率为 0.07。 求 (1) 甲、乙两台机床至少有一台发生故障的概率；（2）甲、乙两台机床都正常工作的概率。

解：(1）甲、乙两台机床至少有一台发生故障的互斥事件是两台机床都不发生故障，则 P=1-(1-0.06)*(1-0.07)=0.1258

(2)两台机器都正常 P=1-0.1258=0.8742

错误人数：2

3.3.9 在一批电子元件中，甲类占 80%，乙类占 12%，丙类占 8%。这三类元件的使用寿 命能达到指定要求的概率依次为 0.9，0.8，0.7。现任取一个元件，则使用寿命能达到指 定要求的概率是多少?

解 设 A_1="取出元件是甲类的"，

A_2="取出元件是乙类的"，

A_3="取出元件是丙类的"，

B="取出元件使用寿命能达到指定要求"

$P(B|A_1)=0.9$，$P(B|A_2)=0.8$，$P(B|A_3)=0.7$，

$P(A_1)=0.8$，$P(A_2)=0.12$，$P(A_3)=0.08$，

由全概率公式:

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=0.872$$ 。

错误人数：1

3.3.10 设事件 A、B 相互独立。已知只有 A 发生和只有发生 B 的概率都 1/4，求 P(A)，P(B).

解 只有 A 发生即 A 发生且 B 不发生。

A、B 相互独立，根据题设条件 P(A)(1-P(B))=1/4，

同理 P(B)(1-P(A))=1/4，解得 P(A)=P(B)=0.5。

错误人数：1

3.3.12 已知 A、B、C 两两独立，其概率分别为 0.2、0.4、0.6，P(A+B+C)=0.76，求概率 $P(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$ 。

解 $P(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})=P(\overline{ABC})=1-P(ABC)$

而 $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

A、B、C 两两独立所以

P(AB)=P(A)P(B)，P(AC)=P(A)P(C)，P(BC)=P(B)P(C)。

代入上式，由已知条件得 P(ABC)=0,

从而 $P(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})=P(\overline{ABC})=1-P(ABC)=1$。

错误人数：7 解题思路：因 $P(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})=P(\overline{ABC})=1-P(ABC)$

要求 $P(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$即求 P（ABC）,由题意列出关于 P(A+B+C) 的方程即可求得

3.3.13 已知 P(A)=P(B)=0.4，P(A+B)=0.5。求（1）P(A|B)；

(2)P(A-B)； （3）$P(A|\bar{B})$.

解 (1)由已知 P(A)=P(B)=0.4，P(A+B)=0.5。

故 P(AB)=0.3， $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.3}{0.4}=0.75$;

(2) P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.1;

(3) $P(A\mid\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A-B)}{1-P(B)}=\dfrac{0.1}{0.6}=\dfrac{1}{6}$.

错误人数：2

3.3.14 已知事件 A 与 B 相互独立，且 $P(A)=P(\overline{B})=\alpha-1$，P(A+B)=7/9，试确定 α 的值。

解 A与B相互独立所以 P(AB)=P(A)P(B)，

P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)。

代入已知条件得 $\alpha-1+1-(\alpha-1)-(\alpha-1)[1-(\alpha-1)]=7/9$，

解得 $\alpha=4/3$ 或 5/3。

（错误人数：5） 错的同学大部分得α=0.6 或 0.8，计算错误，思路正确

3.3.15 事件 A 与 B 相互独立，已知 P(A)=0.4，P(A+B)=0.7，求 P(AB)及 $P(\overline{B}|A)$。

解 P(A+B) =P(A)+P(B)- P(AB),

A与B相互独立， P(AB)=P(A)P(B),

得到 P(B)=0.5，因此 P(AB)=P(A)P(B) =0.2,

$P(\overline{B}\mid A)=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{P(A)}=0.5$。

错误人数：2

3.3.17 甲、乙、丙三人向同一飞机射击，假设他们的命中率都是 0.4。又若只有一人命中时， 飞机坠毁的概率为 0.2；恰有两人命中时，飞机坠毁的概率为 0.6；三人命中时，飞机 必坠毁。求飞机坠毁的概率.

解　设 A_i="有 i 人击中飞机"，i=0,1,2,3

B="飞机坠毁"，

由已知 $P(B|A_0)=0$， $P(B|A_1)=0.2$， $P(B|A_2)=0.6$， $P(B|A_3)=1$，

$P(A_1)=C_3^1\times0.4\times0.6^2$， $P(A_2)=C_3^2\times0.4^2\times0.6$， $P(A_3)=0.4^3$，

由全概率公式：

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)\\
&+P(A_3)P(B|A_3)=0.3232.
\end{aligned}
$$

错误人数：4　解题思路：分别求出有 i 人击中飞机的概率，再根据全概率公式计算出飞机坠毁概率。

3.3.19 袋中有一个白球和一个黑球，一次次地从袋中摸球，如果取出白球，则除把白球放回外再加进一个白球，直至取出黑球为止，求取了 N 次都没有取到黑球的概率。

解　设 A_i="第 i 次取到白球"

$$P(A_1)=\frac{1}{2},\quad P(A_2|A_1)=\frac{2}{3},$$

$$P(A_3|A_1A_2)=\frac{3}{4},\quad \cdots,\quad P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})=\frac{n}{n+1},$$

所求概率即为 $P(A_1A_2\cdots A_N)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_N|A_{1\ldots}A_{N-1})=\dfrac{1}{N+1}$。

错误人数：5 本题为找规律题，自己画图实践后即易得出结论。数学的学习应结合建立数学模型和数学思维的方法。

3.3.21 某人过去射击的成绩是每射 5 次总有 4 次命中目标，根据这一成绩，求（1）射击三次皆中目标的概率；(2) 射击三次有且只有两次命中目标的概率；（3） 射击三次至少有两次命中目标的概率。

解 某人过去射击的成绩是每射 5 次总有 4 次命中目标，

射击三次，相当于 3 重伯努利试验，且每次命中概率 $p=4/5$,

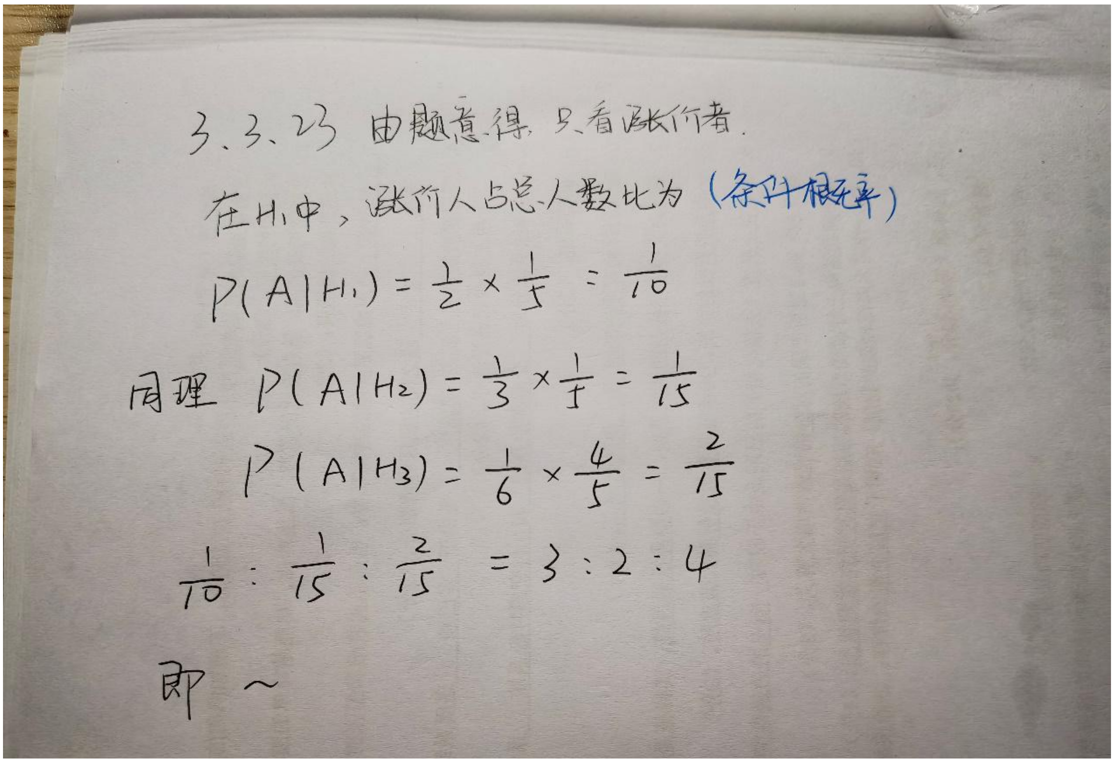
(1) $P_3(3)=C_3^3p^3(1-p)^0=0.8^3=0.512$;

(2) $P_3(2)=C_3^2p^2(1-p)^1=3\times0.8^2\times0.2=0.384$;

(3) $P_3(2)+P_3(3)=0.384+0.512=0.896$.

错误人数：2

3.3.23



3.3.23 由题意得，只看涨价者.

在H_1中，涨价人占总人数比为（条件概率）

$P(A|H_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

同理 $P(A|H_2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$

$P(A|H_3)=\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{15}$

$\frac{1}{10}:\frac{1}{15}:\frac{2}{15}=3:2:4$

即 ~