文科概率统计

3.8 假设检验

3.8.1 假设检验的基本思想

在数理统计中,我们把需要用样本去判断正确与否的命题称为一个**假设**. 根据研究目的提出的假设称为**原假设**,记为 H_0;而其对立面假设称为**备择假设**(或**对立假设**),记为 H_1.

提出了"假设"之后,就要用适当的统计方法来决定是否接受假设,这叫做**假设检验**或称**统计假设检验**.

假设检验所依据的基本原理是小概率原理:"小概率事件在一次试验(或观测)中几乎是不可能出现的."

其分析问题的方法是带有概率性质的反证法.

下面举例说明参数假设检验的基本思想.

例 3.8.1 某厂为了提高其产品电池的寿命进行了工艺改革. 从生产的一大批产品中随机抽取 10 只,测得其样本均值 $\bar{x}=204.8$ h,已知旧工艺条件下的电池寿命服从正态分布 $N(200,5^2)$,试问新产品的寿命与旧产品的寿命是否一致.

解 一般说来,工艺条件的变化只影响均值而对方差影响不大. 因此,可以认为新产品寿命 X 服从正态分布 $N(\mu,5^2)$,μ 是未知的,而 $\mu=200$ 是否成立也是未知的. 我们已知 μ 的估计值 $\bar{x}=204.8$,$\bar{x}>200$,能否说 $\mu>200$ 呢? 不能. 因为样本均值 $\bar{X}$ 是随机变量,若再抽 10 个产品,其平均寿命可能小于 200,随机变量与常数之间不能比大小. 那么如何利用样本信息对假设 $\mu=200$ 或 $\mu\neq200$ 做出推断呢?

如果原假设$\mu=200$成立，那么$X\sim N(200,5^2)$，从而由3.6.6抽样分布中的结论有

$$\bar{X} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} X_k \sim N(200,25/10).$$

统计量$U=\dfrac{\bar{X}-200}{5/\sqrt{10}}\sim N(0,1)$，对于给定的$\alpha=0.05$，令

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-200}{5/\sqrt{10}}\right|<U_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha=0.95,$$

或

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-200}{5/\sqrt{10}}\right|\geqslant U_{\frac{\alpha}{2}}\right)=\alpha=0.05.$$

为保证服从标准正态分布的统计量 U 落在 $[-U_{\alpha/2}, U_{\alpha/2}]$ 区域内的概率为 95%，因此查标准正态分布函数数值表有 $U_{\alpha/2}=1.96$（图 3.43）.

由于 $\bar{X}$ 的观测值 $\bar{x}=204.8$，因此统计量 U 的观测值 u_0 满足

$$|u_0| = \left|\frac{204.8-200}{5/\sqrt{10}}\right| \approx 3.036 > 1.96 = U_{\frac{\alpha}{2}}.$$

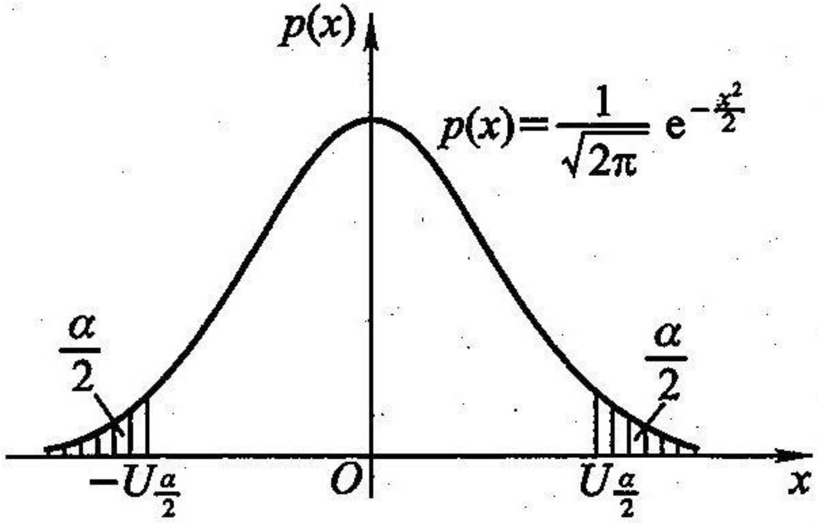

图 3.43

而由前可知 $P\left(\left|\frac{\bar{X}-200}{5/\sqrt{10}}\right| \geqslant U_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \alpha = 0.05$ 是一个小概率. 这就意味着，若原假设 $H_0: \mu=200$ 成立，那么由抽出的样本观测值计算出的统计量 u_0 大于 1.96 的可能性只有 5%，而现在它在一次抽样中，竟发生了这种情形，这是不合理的，产生这种不合理的根源在于假设 H_0: $\mu=200$ 不合理，因此拒绝 H_0，而接受 $H_1: \mu \neq 200$.

参数的假设检验就是先对总体参数做出先验假设，然后用样本信息按照一定的法则来判断先验假设是否合理，以此决定接受假设或拒绝假设. 一般说来，我们并不能证明一个统计假设是正确的还是错误的，只能说，如果样本资料所提供的信息使我们可以相信假设时，我们就不要拒绝它，否则就要拒绝它.

至于什么算“概率很小”，在检验之前都事先指定，比如 5%、1% 等，一般把它记作 α，α 是一个事先指定的小的正数，称为**显著性水平或检验水平**.

由此可见，假设检验的结论与选取的显著性水平 α 有密切的关系，因此必须说明假设检验的结论是在怎样的显著性水平下做出的.

3.8.2 假设检验的一般步骤

根据问题要求的不同,假设检验有双侧检验与单侧检验之分.

从前面的例 3.8.1 的假设检验中,当统计量 U 的观测值的绝对值大于临界值 $U_{\alpha/2}$ 即 $|u_0|>U_{\alpha/2}$ 时,则拒绝原假设 H_0,通常称这样的区域 $\{|u_0|>U_{\alpha/2}\}$ 为**关于原假设 H_0 的拒绝域**(简称**拒绝域**). 而形如"$H_1: \mu\neq\mu_0$"的备择假设表示 μ 可能大于 μ_0,也可能小于 μ_0,称这种假设检验为**双侧假设检验**.

在实际中,除了双侧假设检验外,有时还用到单侧假设检验. 如在例 3.8.1 中,工艺改革后,我们关心的是电池的平均寿命 μ 不能降低,因此可把问题改为"工艺改革后,电池的平均寿命 μ 不小于 200 h"可能更合理一些. 这样,就要检验如下的假设:

$$H_0: \mu\geqslant 200, H_1: \mu<200.$$

相对应的还可以有与此相反的假设:

$$H_0: \mu\leqslant 200, H_1: \mu>200.$$

这样的假设检验都称为**单侧假设检验**.

一般的，我们有如下的结论：

若假设检验的模型为

（Ⅰ）$H_0: \theta=\theta_0$，$H_1: \theta\neq\theta_0$，

则称该检验为**双侧检验**.

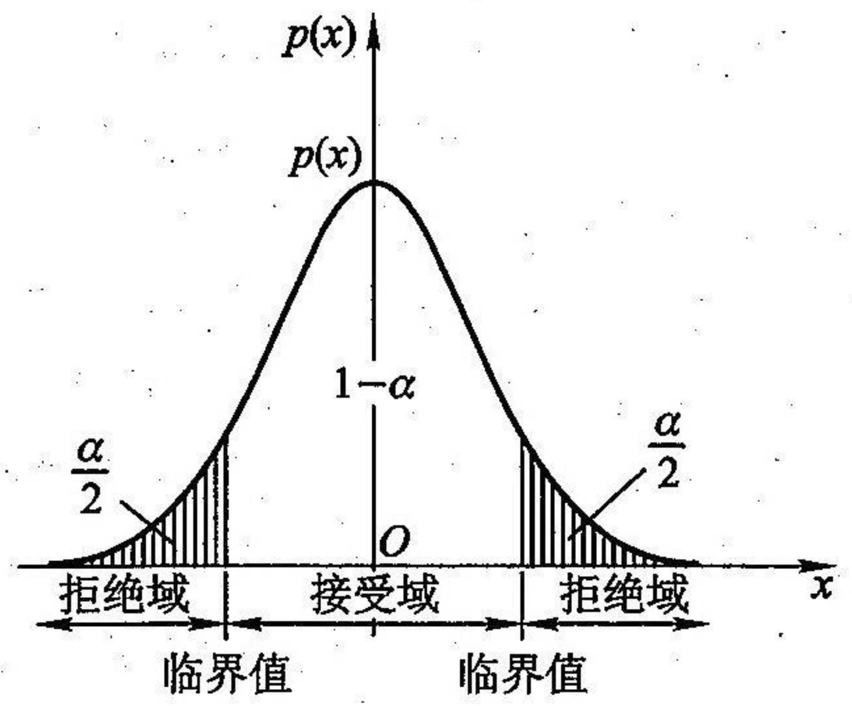

图 3.44

对于模型（Ⅰ），若总体 X 为连续型随机变量且选定的统计量的密度函数为 $p(x)$，则该检验的拒绝域在密度曲线的两端，见图 3.44.

若假设检验的模型为

（Ⅱ）$H_0: \theta \leqslant \theta_0$, $H_1: \theta > \theta_0$ 或

（Ⅲ）$H_0: \theta \geqslant \theta_0$, $H_1: \theta < \theta_0$,

则称该检验为**单侧检验**.

对于模型（Ⅱ），若总体 X 为连续型随机变量且选定的统计量的密度函数为 $p(x)$，则该检验的拒绝域在密度曲线的右端，见图 3.45.

对于模型（Ⅲ），若总体 X 为连续型随机变量且选定的统计量的密度函数为 $p(x)$，则该检验的拒绝域在密度曲线的左端，见图 3.46.

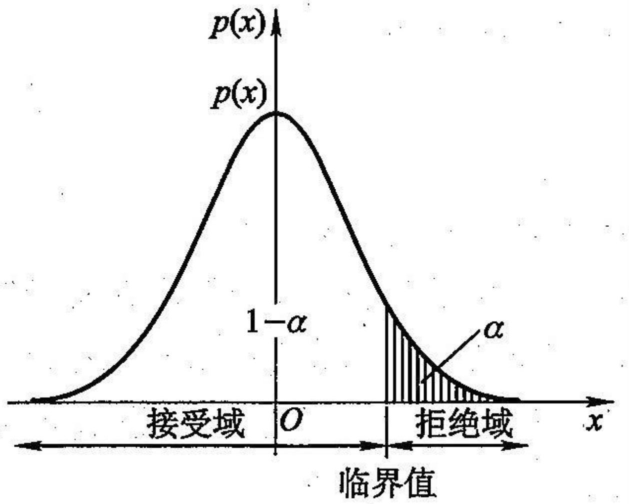

图 3.45

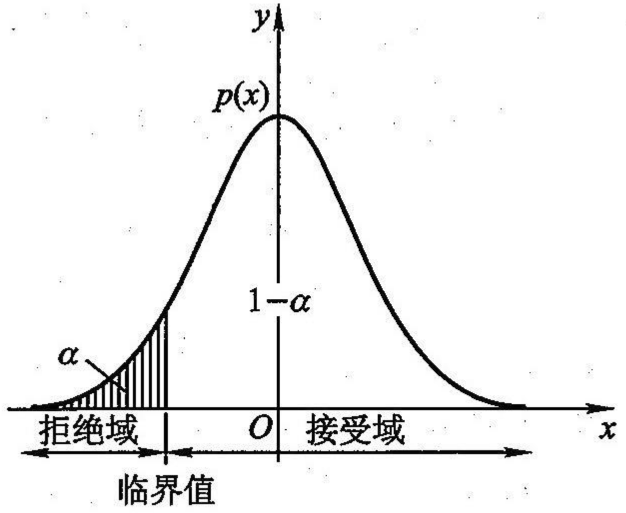

图 3.46

数学上可以证明，当总体 X 为正态分布时，模型（Ⅱ）与模型

$$H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta > \theta_0 \quad \text{有相同的拒绝域.}$$

模型（Ⅲ）与模型

$$H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta < \theta_0 \quad \text{有相同的拒绝域.}$$

我们通过例 3.8.1 已对假设检验的基本思想有了了解，由此可知假设检验一般可以按照下列步骤进行.

(1) 根据问题的需要做出原假设 H_0，将其对立面作为备择假设. 在实际问题中，对原假设 H_0 的提出，可以从以往的经验得出，也可以从具体问题的要求得到.

（2）选取合适的统计量，并在原假设 H_0 成立的条件下，确定该统计量的分布. 统计量的选择与原假设有关，统计量是样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的函数，它不能包含未知参数，但要包含原假设中的已知参数. 因为只有不包含未知参数，才能计算它的观察值；只有包含 H_0 中的已知参数，才能对原假设是否成立做出判断. 另外，统计量在 H_0 成立的条件下，其分布应为已知，才能由此确定拒绝域.

（3）由统计量的分布及显著性水平 α，确定拒绝接受 H_0 的区域 G 使得 $P(G)=\alpha$（如例 3.8.1 中 $P(|U| \geqslant U_{\alpha/2})=\alpha$）. 确定拒绝域的关键是根据给定的显著性 α 寻找分布的临界值（如例 3.8.1 中的 $U_{\alpha/2}$）.

（4）由样本观测值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 作出统计推断. 把实际得到的样本值代入统计量中，算出实际统计量之值，看实际统计量的值是否落在拒绝域中，以决定拒绝或接受原假设 H_0.

3.8.4 单个正态总体均值的假设检验

1. 正态总体方差 σ^2 已知

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，(σ^2已知)，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自正态总体 X 的一个简单随机样本，样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，现对总体均值 μ 作假设检验.

如果给定一个常数 μ_0，根据不同的问题可以做出不同的假设.

问题(1) μ 是否等于 μ_0，所以有假设：

(Ⅰ) $H_0: \mu=\mu_0, H_1: \mu\neq\mu_0$(双侧检验).

问题(2) μ 是否不大于 μ_0，所以有假设：

(Ⅱ) $H_0: \mu\leqslant\mu_0, H_1: \mu>\mu_0$(单侧检验)，它与模型

$H_0: \mu=\mu_0, H_1: \mu>\mu_0$有相同的拒绝域.

问题(3) μ 是否不小于 μ_0，所以有假设：

(Ⅲ) $H_0: \mu\geqslant\mu_0, H_1: \mu<\mu_0$(单侧检验)，它与模型

$H_0: \mu=\mu_0, H_1: \mu<\mu_0$有相同的拒绝域.

由于总体方差σ^2已知，根据3.6.6节抽样分布中的结论，选用统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

统计量的选取要求同3.7节中区间估计中统计量选取相同(1)统计量中要含有作假设检验的参数，而不能含有其他未知参数；(2) 统计量的分布是已知的.

当H_0成立时

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$

对于给定的显著性水平α，由于标准正态分布的密度曲线是关于y轴对称的，因此，由模型(Ⅰ)的双侧检验可以定出小概率事件：

$$P(|U|\geqslant U_{\alpha/2})=\alpha,$$

即
$$P(U \geqslant U_{\alpha/2}) = P(U \leqslant -U_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

由模型(Ⅱ)的单侧检验可以定出小概率事件:
$$P(U \geqslant U_{\alpha}) = \alpha.$$

由模型(Ⅲ)的单侧检验可以定出小概率事件:
$$P(U \leqslant -U_{\alpha}) = \alpha.$$

根据统计量 U 的分布,关键是要寻找临界值 $U_{\alpha/2}$ 及 U_{α}

$$\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

查标准正态分布函数数值表(附表 2),就可以得到临界值 $U_{\alpha/2}$
$$\Phi(U_{\alpha}) = 1 - \alpha.$$

同样查标准正态分布函数数值表(附表 2),就可以得到临界值 U_{α}.

由样本观测数据$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，计算统计量 U 的样本观测值 u_0，习惯上采用下面的方法进行判定：

1．对于模型（Ⅰ），当 $|u_0|\geqslant U_{\alpha/2}$ 时，拒绝 H_0，否则不拒绝 H_0；其拒绝域是 $\{|u_0|\geqslant U_{\alpha/2}\}$，如图 3.47 所示.

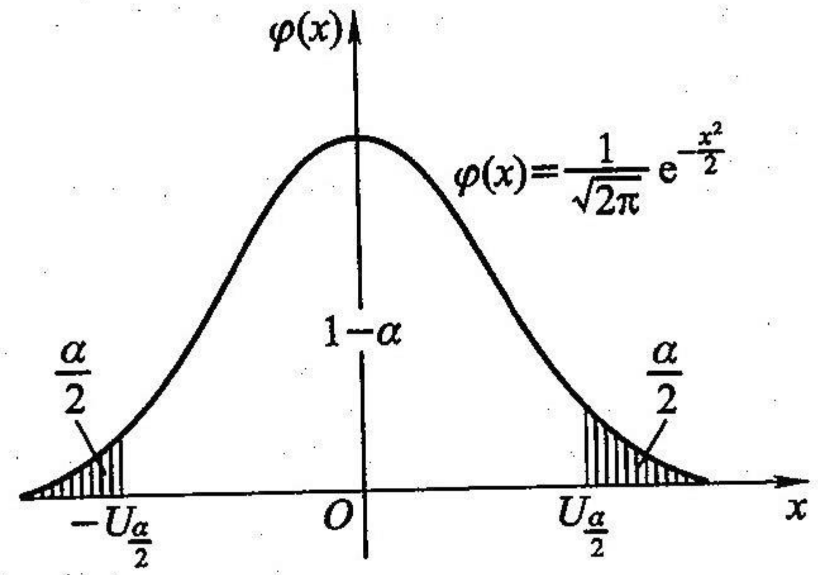

图 3.47

2. 对于模型(Ⅱ),当 $u_0 \geqslant U_\alpha$ 时,拒绝 H_0,否则不拒绝 H_0;其拒绝域是 $\{u_0 \geqslant U_\alpha\}$,如图 3.48 所示.

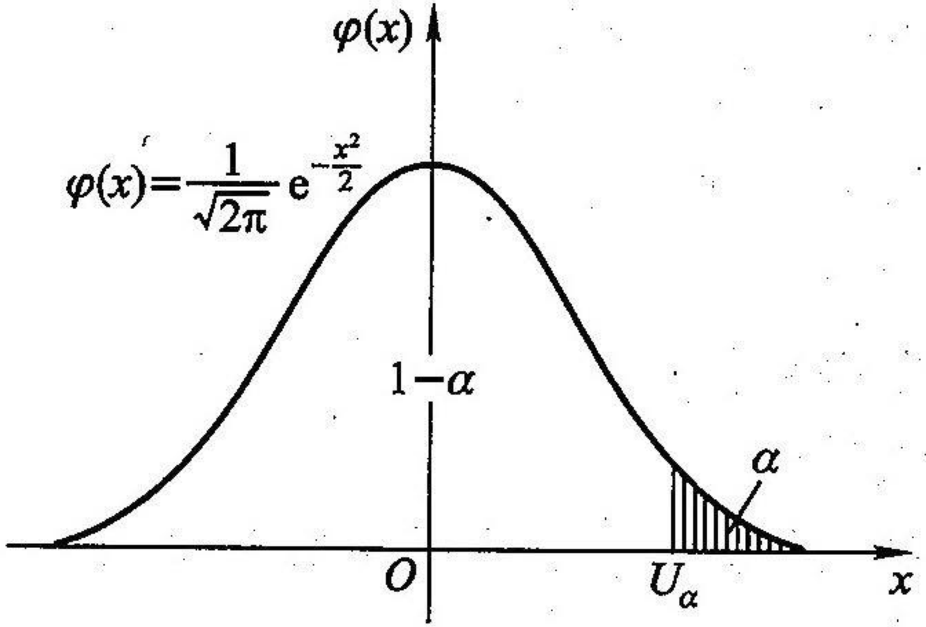

图 3.48

3. 对于模型(Ⅲ),当 $u_0 \leqslant -U_\alpha$ 时,拒绝 H_0,否则不拒绝 H_0;其拒绝域是 $\{u_0 \leqslant -U_\alpha\}$,如图 3.49 所示.

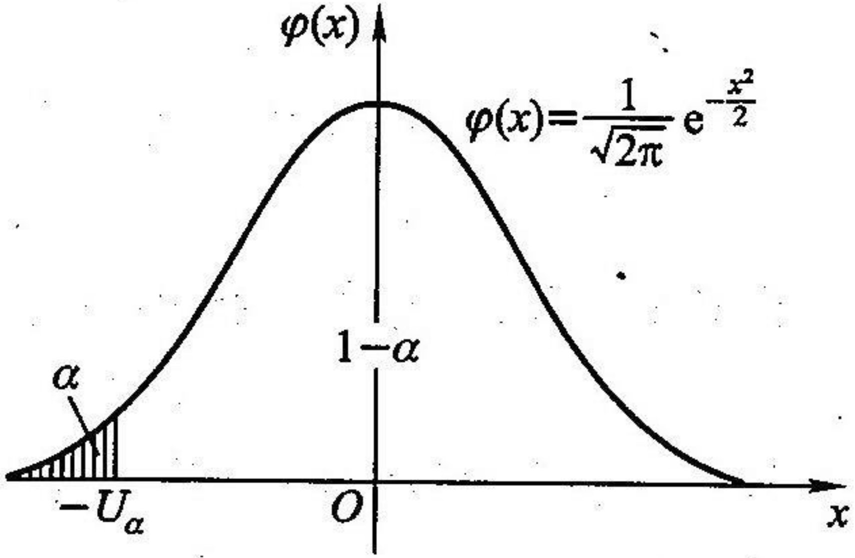

图 3.49

例 3.8.2 某大学一年级新生中女生的身高服从正态分布，平均身高为 162.5 cm，标准差为 6.9 cm. 假如从全校女生中随机抽取 50 名组成的随机样本中，平均身高为 165.2 cm，则在 $\alpha=0.05$ 的显著性水平上，是否有理由相信女生总体的平均身高较一年级时有所改变.

解 设女生总体的身高为 X，显然 $X\sim N(\mu,6.9^2)$.

根据题意，有假设

$$H_0:\mu=162.5,\ H_1:\mu\neq 162.5.$$

因为总体方差已知，选用统计量

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

当 H_0 成立时

$$U=\frac{\bar{X}-162.5}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$

对于给定的显著性水平 $\alpha=0.05$，由于所作检验的模型为模型（Ⅰ），故其拒绝域为 $\{|u_0|\geqslant U_{\alpha/2}\}$.

$$\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}=0.975.$$

反查标准正态分布函数数值表(附表2)得

$$U_{\frac{\alpha}{2}}=U_{0.025}=1.96.$$

又根据样本观测数据 $\bar{x}=165.2$,所以

$$|u_0|=\left|\frac{\bar{x}-162.5}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{165.2-162.5}{6.9/\sqrt{50}}\right|\approx 2.7669>U_{0.025}=1.96.$$

显然,统计量观测值落在拒绝域内,故在 $\alpha=0.05$ 水平上拒绝 H_0,即有95%的把握相信总体的平均身高有改变.

例 3.8.3 一家小礼品函购公司不管邮件的重量如何，均按统一的价格收邮费，这是基于几年前的一项研究决定的. 这项研究表明，邮件的平均重量是 17.5 g，标准差是 3.6 g，管理部门认为目前邮费亏损的原因是邮件的平均重量在增加，应改变原有统一收费标准. 为此随机抽取了 100 件邮件进行计算得 $\bar{x}=18.4$ g，问根据这个抽样资料应如何决策（显著性水平 $\alpha=0.05$）？

解 设现在邮件的重量为 X，样本容量 $n=100$，$E(X)=\mu$，$D(X)=3.6^2$.

由 3.6.6 中抽样分布中的结论（中心极限定理）知

$$\bar{X}\sim N(\mu,3.6^2/n).$$

根据题意，作假设 $H_0: \mu\leqslant 17.5$，$H_1: \mu>17.5$，它与假设模型

$H_0: \mu=17.5$，$H_1: \mu>17.5$ 有相同的拒绝域.

当 H_0 成立时，统计量

$$U=\frac{\bar{X}-17.5}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{\bar{X}-17.5}{3.6/\sqrt{100}}\sim N(0,1).$$

对于给定的显著性水平 $\alpha=0.05$，由于所作的检验模型为模型（Ⅱ），其拒绝域是 $\{u_0\geqslant U_\alpha\}$.

$$\Phi(U_\alpha)=\Phi(U_{0.05})=1-\alpha=0.95.$$

反查标准正态分布函数数值表(附表2)得

$$U_\alpha=U_{0.05}=1.645.$$

根据样本观测数据 $\bar{x}=18.4$,所以

$$u_0\frac{\bar{x}-17.5}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{18.4-17.5}{3.6/\sqrt{100}}=2.5>U_{0.05}=1.645.$$

显然,统计量观测值落在拒绝域内,故在 $\alpha=0.05$ 水平上拒绝 H_0

判断邮件平均重量在增加,应考虑改变原有统一收费标准.

2. 正态总体方差 σ^2 未知

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，(σ^2 未知)，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自正态总体 X 的一简单随机样本，样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，现对总体均值 μ 作假设检验.

如果给定一个常数 μ_0，根据不同的问题可以做出不同的假设.

问题(1) μ 是否等于 μ_0，所以有假设：

(Ⅰ) $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$（双侧检验）.

问题(2) μ 是否不大于 μ_0，所以有假设：

(Ⅱ) $H_0: \mu \leqslant \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$（单侧检验），它与模型

$H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu > \mu_0$ 有相同的拒绝域.

问题(3) μ 是否不小于 μ_0，所以有假设：

(Ⅲ) $H_0: \mu \geqslant \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$（单侧检验），它与模型

$H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$ 有相同的拒绝域.

由于总体方差 σ^2 未知，根据 3.6.6 节抽样分布中的结论，选用统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

当 H_0 成立时统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$

对于给定的显著性水平 α，因为 t 分布的密度函数曲线是关于 y 轴对称的.

因此，由模型(Ⅰ)的双侧检验可以定出小概率事件：

$$P(|T|\geqslant t_{\alpha/2}(n-1))=\alpha,$$

即

$$P(T\geqslant t_{\alpha/2}(n-1))=P(T\leqslant -t_{\alpha/2}(n-1))=\frac{\alpha}{2}.$$

由模型(Ⅱ)的单侧检验可以定出小概率事件：

$$P(T\geqslant t_{\alpha}(n-1))=\alpha.$$

由模型(Ⅲ)的单侧检验可以定出小概率事件：

$$P(T\leqslant -t_{\alpha}(n-1))=\alpha.$$

由样本观测数据 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，计算统计量 T 的样本观测值 t_0.

1. 对于模型(Ⅰ),当$|t_0|\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$时,拒绝 H_0,否则不拒绝 H_0;其拒绝域是$\{|t_0|\geqslant t_{\alpha/2}(n-1)\}$,如图 3.50 所示.

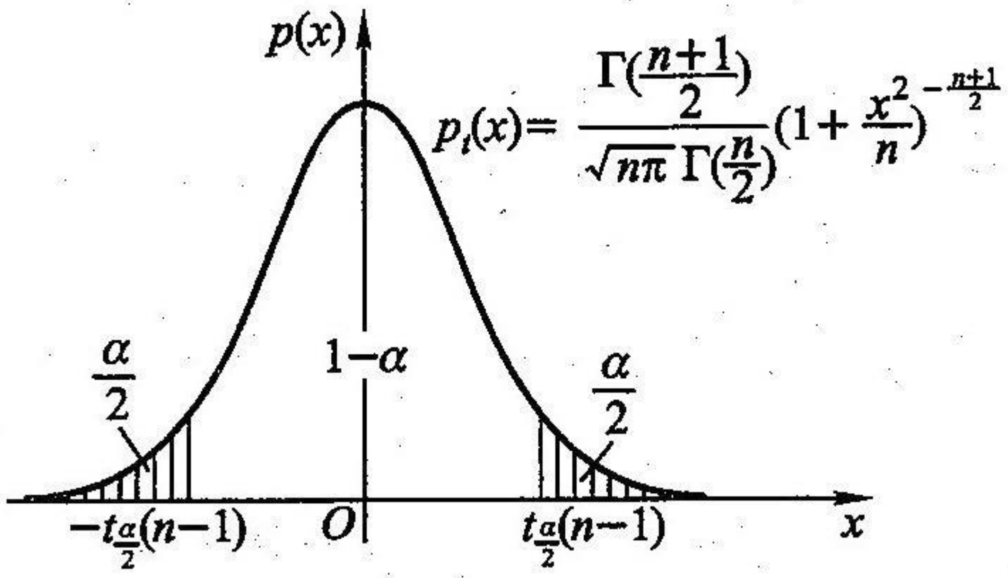

图 3.50

2. 对于模型(Ⅱ),当 $t_0 \geqslant t_\alpha(n-1)$ 时,拒绝 H_0,否则不拒绝 H_0;其拒绝域是 $\{t_0 \geqslant t_\alpha(n-1)\}$,如图 3.51 所示.

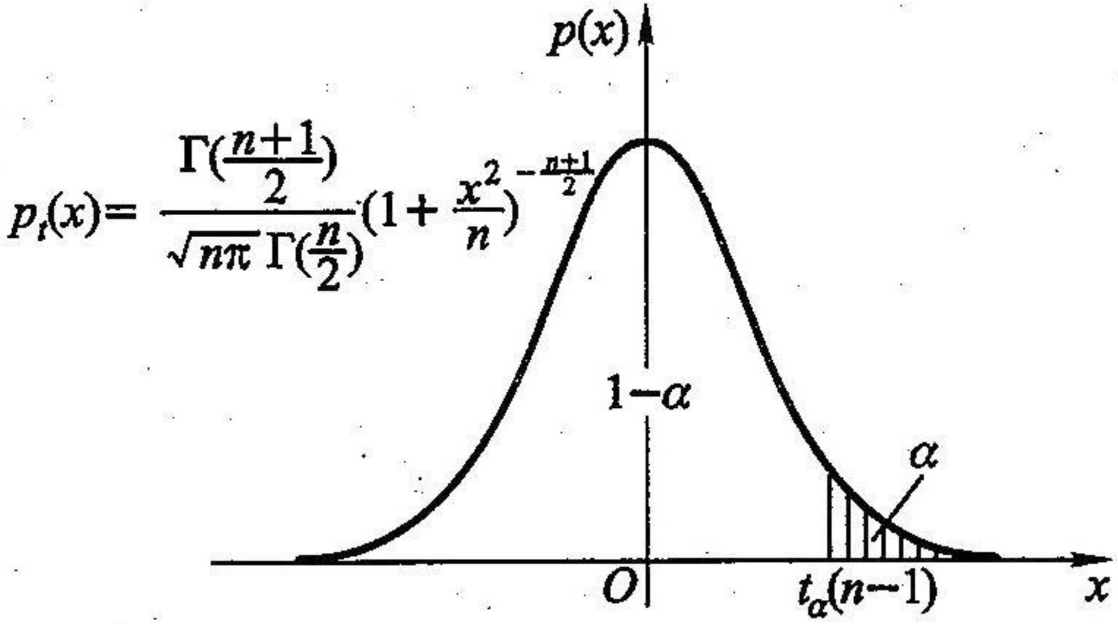

图 3.51

3. 对于模型(Ⅲ),当 $t_0 \leqslant -t_\alpha(n-1)$ 时,拒绝 H_0,否则不拒绝 H_0;其拒绝域是 $\{t_0 \leqslant -t_\alpha(n-1)\}$,如图 3.52 所示.

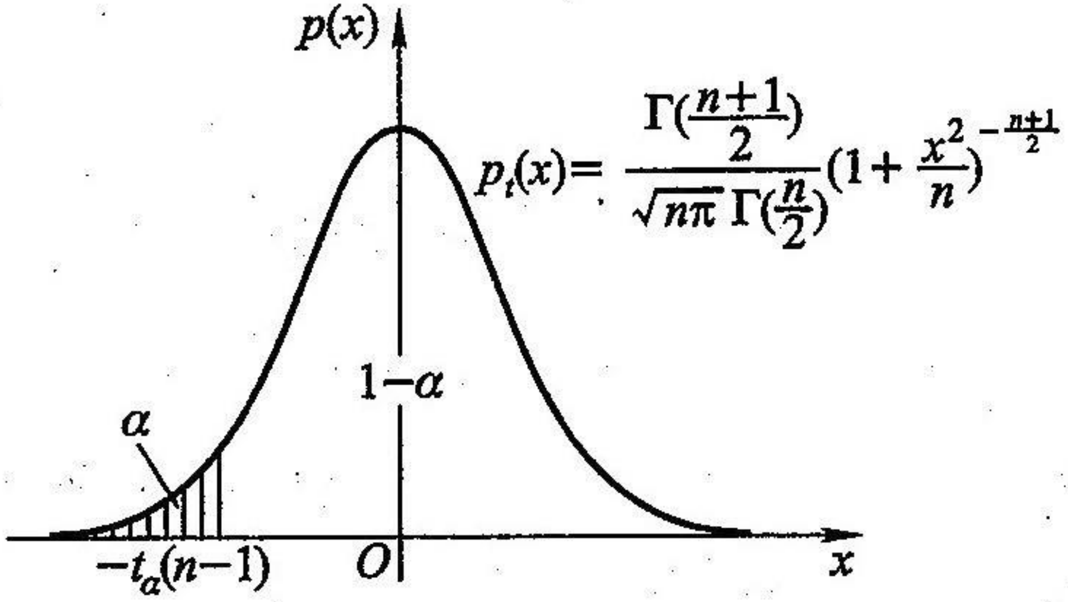

图 3.52

例 3.8.4 某糖厂用自动打包机包糖,每包重量服从正态分布,其标准重量 $\mu_0=100$ 斤,某日开工后测得 9 包重量如下:

$$99.3, 98.7, 100.5, 101.2, 98.3, 99.7, 99.5, 102.1, 100.5.$$

问这一天打包机工作是否正常($\alpha=0.05$)?

解 设每包糖的重量为 X, $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2未知.

由题意作假设

$$H_0: \mu=100, H_1: \mu\neq 100.$$

因为 σ^2未知,选取统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

当 H_0成立时

$$T=\frac{\bar{X}-100}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$

已知 $\alpha=0.05$, $n=9$,由于所作检验模型为模型(Ⅰ),其拒绝域为

$$\{|t_0|\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}.$$

查自由度为 8 的 t 分布临界值表，得到临界值

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306.$$

根据样本观测数据

$$\bar{x}=\frac{1}{9}(99.3+98.7+100.5+101.2+98.3+99.7+99.5+102.1+100.5)$$

$$=99.977\ 8,$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$=\frac{1}{8}[(99.3-99.978)^2+(98.7-99.978)^2+(100.5-99.978)^2+$$

$$(101.2-99.978)^2+(98.3-99.978)^2+(99.7-99.978)^2+$$

$$(99.5-99.978)^2+(102.1-99.978)^2+(100.5-99.978)^2]=1.469\ 4.$$

$$|t_0|=\left|\frac{\bar{x}-100}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{99.978-100}{\sqrt{1.469\ 4}/\sqrt{9}}\right|=0.054\ 45<t_{0.025}=2.306.$$

统计量的观测值没有落在拒绝域中，故不应拒绝 H_0

这一天打包机的工作完全正常.

例 3.8.5 已知罐头西红柿汁中,维生素 C(V_c)含量服从正态分布. 按照规定,V_c的平均含量不得少于 21 mg. 现从一批罐头中抽取 17 个,算得 V_c含量的平均值 $\bar{x}=23$,样本方差 $s^2=3.98^2$,问这批罐头的 V_c含量是否合格($\alpha=0.01$)?

解 设罐头中 V_c的含量为 X,$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,σ^2未知.

由题意作假设

$$H_0:\mu\geqslant 21,\ H_1:\mu<21.$$

该假设与下列假设有相同的拒绝域:

$$H_0:\mu=21,\ H_1:\mu<21.$$

因为 σ^2未知,选取统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$.

当 H_0成立时 $$T=\frac{\bar{X}-21}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$

已知 $\alpha=0.01$, $n=17$,由于所作检验模型为模型(Ⅲ),其拒绝域为 $\{t_0\leqslant -t_\alpha(n-1)\}$.

查自由度为 16 的 t 分布临界值表,得到临界值

$$t_{\alpha}(n-1)=t_{0.01}(16)=2.583\ 5.$$

根据样本观测数据 $\bar{x}=23, s^2=3.98^2$,计算统计量的观测值

$$t_0=\frac{\bar{x}-21}{s/\sqrt{n}}=\frac{23-21}{3.98/\sqrt{17}}=2.071\ 9>-t_{0.01}(16)=-2.583\ 5.$$

统计量的观测值没有落在拒绝域中,故接受 H_0,罐头是合格的.

例 3.8.6 根据医学报告，多食盐可能会引起某些疾病. 人体对盐的需求量每天为 220 mg. 现随机从某种食品中抽取 20 个随机样本，样本平均含盐量为 244 mg，且样本标准差为 24.5 mg. 试问在 $\alpha=0.05$ 的显著性水平下，该食品的平均含盐量是否超过 220 mg（假设此种食品的含盐量服从正态分布）？

解 设这种食品的含盐量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 根据题意，作假设

$$H_0: \mu\leqslant 220, H_1: \mu>220.$$

该假设与下列假设有相同的拒绝域：

$$H_0: \mu=220,\ H_1: \mu>220.$$

又因为 $$X\sim N(\mu,\sigma^2)\ (\sigma^2\text{未知}),$$

所以选取统计量 $$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}.$$

当 H_0 成立时
$$T=\frac{\bar{X}-220}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$$

对于给定的显著性水平 $\alpha=0.05$，$n=20$，由于所作检验模型为模型(Ⅱ)，其拒绝域是 $\{t_0\geqslant t_\alpha(n-1)\}$. 根据
$$P(T\geqslant t_\alpha(n-1))=\alpha=0.05,$$
查自由度为 19 的 t 分布临界值表，得到临界值
$$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(19)=1.729\ 1.$$

根据样本观测数据有
$$\bar{x}=244,\quad s=24.5,$$
计算统计量的观测值
$$t_0=\frac{\bar{x}-220}{s/\sqrt{n}}=\frac{244-220}{24.5/\sqrt{20}}=4.380\ 9>t_{0.05}(19)=1.729\ 1.$$

统计量的观测值落在拒绝域中，故拒绝 H_0，认为此食品的平均含盐量超过 220 mg.

设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 25 位考生的 成绩，算得平均成绩为 66.5 分，

样本标准差为 15 分，问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，是 否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?

标准正态分布分布函数表：　$\Phi(1) = 0.8413$、 $\Phi(1.5) = 0.9332$、 $\Phi(1.645) = 0.95$、 $\Phi(1.96) = 0.975$

t 分布表：$t_{0.025}(24) = 2.0639$， $t_{0.025}(25) = 2.0595$， $t_{0.05}(24) = 1.7109$， $t_{0.05}(25) = 1.7081$

解：根据题意作假设 $H_0:\mu=70, H_1:\mu\neq 70$

选取统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

当 H_0 成立时，$T=\dfrac{\overline{X}-70}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

对给定的 $\alpha=0.05$，找临界值 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，使得 $P\{|T|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=\alpha$，

查表得临界值 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(24)=2.0639$

根据样本观测值，计算

$$|t_0|=\left|\frac{\bar{x}-70}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{66.5-70}{15/\sqrt{25}}\right|=1.167<2.0639$$

接受 H_0，即在显著性水平 α=0.05 下，可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分。

环境保护条例规定，在排放的工业废水中，某种有害物质不得超过 0.5（单位：‰）．现取 5 份水样，测得该有害物质含量，得到如下数据：

0.53　0.542　0.516　0.494　0.512

假定有害物质含量近似服从正态分布，问抽样检验结果是否能说明有害物质含量超过了规定（$\alpha = 0.05$）？

t 分布临界值表：$t_{0.025}(4) = 2.7764$，$t_{0.025}(5) = 2.5706$，$t_{0.05}(4) = 2.1318$，$t_{0.05}(5) = 2.0150$

标准正态分布分布函数表：$\Phi(1) = 0.8413$、$\Phi(1.5) = 0.9332$、$\Phi(1.645) = 0.95$、$\Phi(1.96) = 0.975$

解：　设 $H_0:\mu \le 0.5,\ H_1:\mu > 0.5.$

与 $H_0:\mu = 0.5,\ H_1:\mu > 0.5.$ 有相同的拒绝域。

选取 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$，当 H_0 成立时，$T=\dfrac{\overline{X}-0.5}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$

对于给定的 $\alpha = 0.05$，找临界值 $t_\alpha(n-1)$，使得 $P(T > t_\alpha(n-1)) = \alpha.$

查表得 $t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(4) = 2.1318.$

根据样本数据有 $t_0=\dfrac{\overline{x}-0.5}{s/\sqrt{n}}=\dfrac{0.5188-0.5}{0.01825/\sqrt{5}}=2.303>2.1318$

落在拒绝域中，所以拒绝 H_0，即在 $\alpha = 0.05$ 水平下说明有害物质含量超过了规定。

3.8.5 两个正态总体均值之差的假设检验（σ_1^2、σ_2^2已知）

设两个总体 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 相互独立，$(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$ 与 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})$ 是分别来自 X 与 Y 的两个样本. 样本均值分别为 $\bar{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$，$\bar{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i$，方差 σ_1^2、σ_2^2 已知. 现对两总体均值之差 $\mu_1-\mu_2$ 作假设检验.

根据问题的提法，有如下的假设：

模型(Ⅰ)　$H_0: \mu_1-\mu_2=0\ (\mu_1=\mu_2)$，　$H_1: \mu_1-\mu_2\neq 0$　（双侧检验）.

模型(Ⅱ)　$H_0: \mu_1-\mu_2\leqslant 0$，　$H_1: \mu_1-\mu_2>0$　（单侧检验），它与模型

$H_0: \mu_1-\mu_2=0$，　$H_1: \mu_1-\mu_2>0$　有相同的拒绝域.

模型(Ⅲ)　$H_0: \mu_1-\mu_2\geqslant 0$，　$H_1: \mu_1-\mu_2<0$　（单侧检验），它与模型

$H_0: \mu_1-\mu_2=0$，　$H_1: \mu_1-\mu_2<0$　有相同的拒绝域.

由 3.6.6 节抽样分析中的结论，选取统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

当 H_0 成立时

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1).$$

例 3.8.7 某公司从甲、乙两个灯泡厂购买同类型灯泡，设甲厂灯泡寿命 $X \sim N(\mu_1, 80^2)$，乙厂灯泡寿命 $Y \sim N(\mu_2, 90^2)$. 为了确定其质量，分别从两厂抽取 $n_1 = 50$，$n_2 = 40$ 两组灯泡进行测量，算得 $\bar{x} = 1\ 282(\mathrm{h})$，$\bar{y} = 1\ 208(\mathrm{h})$. 现能否判定两厂灯泡寿命存在差别($\alpha = 0.05$)?

解 根据题意，要检验假设

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0(\mu_1 = \mu_2) \quad H_1: \quad \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$$

由于两个总体的方差 σ_1^2 和 σ_2^2 已知，故在 H_0 成立的条件下，统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1).$$

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$，因为所检验的模型为模型(Ⅰ)，其拒绝域是 $\{|u_0| \geqslant U_{\alpha/2}\}$.

$\Phi(U_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 0.975.$

查标准正态分布函数数值表(附表2)得

$$U_{\alpha/2} = U_{0.025} = 1.96.$$

又根据样本观测数据 $\bar{x} = 1\ 282(\mathrm{h}), \bar{y} = 1\ 208(\mathrm{h})$,

$$n_1 = 50, \quad n_2 = 40, \quad \sigma_1^2 = 80^2, \quad \sigma_2^2 = 90^2,$$

$$|u_0| = \left|\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right| = \left|\frac{1\ 282 - 1\ 208}{\sqrt{\dfrac{80^2}{50} + \dfrac{90^2}{40}}}\right| = 4.070\ 5 > U_{0.025} = 1.96.$$

显然,统计量观测值落在拒绝域内,故在 $\alpha = 0.05$ 水平上拒绝 H_0 而接受 H_1,认为两厂灯泡的寿命存在差异.

3.8.6 两个非正态总体均值之差的假设检验（$n_1 \geq 50, n_2 \geq 50$）

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$ 是来自总体 X 的一简单随机样本,$E(X)=\mu_1$, $D(X)=\sigma_1^2$;$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})$ 是来自总体 Y 的一简单随机样本,$E(Y)=\mu_2$, $D(Y)=\sigma_2^2$. 样本均值分别为 $\bar{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$,$\bar{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i$,样本方差分别为 $S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2$,$S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2$. 由 3.6.6 节抽样分布中的结论及中心极限定理,当样本容量充分大($n_1\geqslant 50$,$n_2\geqslant 50$),方差 σ_1^2,σ_2^2 已知时选取统计量

$$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\quad \text{近似服从 } N(0,1).$$

方差 σ_1^2,σ_2^2未知时,用样本方差代替总体方差,选取统计量

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\quad \text{近似服从 } N(0,1).$$

同样，根据问题的提法，有如下的假设：

模型（Ⅰ） $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 (\mu_1 = \mu_2)$， $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ （双侧检验）.

模型（Ⅱ） $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leqslant 0$， $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ （单侧检验），它与模型

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$， $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ 有相同的拒绝域.

模型（Ⅲ） $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geqslant 0$， $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ （单侧检验），它与模型

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$， $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$ 有相同的拒绝域.

当 H_0 成立时

$$U = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \text{近似服从 } N(0,1),$$

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \quad \text{近似服从 } N(0,1).$$

例 3.8.8 两台机床加工同一种圆筒，抽样测量产品内径，结果如下（单位：mm）：

第一台机床 $n_1=100, \bar{x}=33.75, s_x=0.1$；

第二台机床 $n_2=100, \bar{y}=34.15, s_y=0.15$.

试检验两台机床所加工的圆筒内径均值有无显著差异（$\alpha=0.05$）？

解 根据题意，要检验假设

$$H_0: \mu_1-\mu_2=0(\mu_1=\mu_2), H_1: \mu_1-\mu_2\neq 0.$$

由于两个总体的方差 σ_1^2 和 σ_2^2 未知，且样本容量 $n_1=100, n_2=100$，故在 H_0 成立的条件下，统计量

$$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_1}+\dfrac{S_y^2}{n_2}}} \quad \text{近似服从 } N(0,1).$$

对于给定的显著性水平 $\alpha=0.05$，因为所检验的模型为模型(Ⅰ)，其拒绝域是 $\{|z_0|\geqslant U_{\alpha/2}\}$.

$$\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}=0.975.$$

查标准正态分布函数数值表(附表2)得

$$U_{\frac{\alpha}{2}}=U_{0.025}=1.96.$$

又根据样本观测数据 $\bar{x}=33.75,\bar{y}=34.15$,

$$n_1=100,n_2=100,s_x^2=0.1^2,s_y^2=0.15^2,$$

$$|z_0|=\left|\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}}}\right|=\left|\frac{33.75-34.15}{\sqrt{\frac{0.1^2}{100}+\frac{0.15^2}{100}}}\right|=22.188>U_{0.025}=1.96.$$

显然，统计量观测值落在拒绝域内，故在 $\alpha=0.05$ 水平上拒绝 H_0 而接受 H_1，认为两台机床加工圆筒内径均值存在显著差异.

例 3.8.9 某调查公司为了比较判断 A、B 两类家庭每周看电视的时间. 现从 A 类家庭中随机地访问了 100 户,了解到每周看电视的平均时间是18.5 h,样本标准差为 10 h;从 B 类家庭中随机访问了 75 户,其每周看电视的平均时间为 21.2 h,样本标准差为 14 h. 问能否得出 A 类家庭看电视的平均时间比 B 类家庭少($\alpha=0.05$)?

解 根据题意,要检验的假设是

$H_0: \mu_A-\mu_B\geqslant 0, H_1: \mu_A-\mu_B<0$,它与模型

$H_0: \mu_A-\mu_B=0, H_1: \mu_A-\mu_B<0$ 有相同的拒绝域.

由于两个总体的方差 σ_A^2 和 σ_B^2 未知, $n_1=100, n_2=75$,故在 H_0 成立的条件下,统计量

$$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_A^2}{n_1}+\dfrac{S_B^2}{n_2}}} \quad \text{近似服从 } N(0,1).$$

对于给定的显著性水平 $\alpha=0.05$,因为所检验的模型为模型(Ⅲ),其拒绝域是$\{z_0\leqslant -U_\alpha\}$.

$\Phi(U_\alpha)=1-\alpha=0.95.$

查标准正态分布函数数值表(附表2)得

$$U_\alpha=U_{0.05}=1.645.$$

又根据样本观测数据 $\bar{x}=18.5,\bar{y}=21.2,$

$$n_1=100,n_2=75,s_A^2=10^2,s_B^2=14^2,$$

$$z_0=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_1}+\frac{s_B^2}{n_2}}}=\frac{18.5-21.2}{\sqrt{\frac{10^2}{100}+\frac{14^2}{75}}}=-1.420\,4>-U_{0.05}=-1.645.$$

显然,统计量观测值没有落在拒绝域内,故在 $\alpha=0.05$ 水平上接受 H_0

认为 A 类家庭看电视的平均时间不比 B 类家庭少.

对 9 名运动员进行考核，成绩分别为 76，71，57，49，70，69，26，65，59.

经短期培训后再考核，成绩分别为 81，85，52，52，70，63，33，83，62.

试判断培训后成绩是否显著提高.（假设两总体分布近似服从标准差

分别为 3 和 2 的正 态分布，$\alpha=0.05$

标准正态分布分布函数表： $\Phi(1)=0.8413$、 $\Phi(1.5)=0.9332$、$\Phi(1.645)=0.95$、 $\Phi(1.96)=0.975$

解： 根据题意做假设检验模型

$$H_0:\mu_1 \geqslant \mu_2,\quad H_1:\mu_1 < \mu_2,$$

与 $H_0:\mu_1 = \mu_2,\quad H_1:\mu_1 < \mu_2$,有相同的拒绝域。

选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

当 H_0成立时 $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$,

对于给定的显著性水平$\alpha=0.05$，找临界值$-U_\alpha$，使得$P(U<-U_\alpha)=0.05$，

$\Phi(U_\alpha)=1-\alpha=0.95$，则$U_\alpha=U_{0.05}=1.645$ 临界值为-1.645

根据样本数据计算

$$u_0=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{60.22-64.56}{\sqrt{\frac{3^2}{9}+\frac{2^2}{9}}}=-3.61<-1.645,$$

落在拒绝域中，所以拒绝H_0，认为培训后成绩是显著提高

随机选取 8 个人，分别测量了他们在早晨起床时和晚上就寝时的身高（cm），得到数据：早上 X：172，168，180，181，160，163，165，177；

晚上 Y：172，167，177，179，159，161，166，175

假设早晨和晚上的身高均服从标准差分别为 1 和 2 的正态分布，

问是否可以认为早晨的身高比晚上的身高要高？（$\alpha=0.05$，结果保留两位小数）

标准正态分布分布函数表： $\Phi(1)=0.8413$、 $\Phi(1.5)=0.9332$、$\Phi(1.645)=0.95$、 $\Phi(1.96)=0.975$

解：设早上身高 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，晚上身高 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，

已知 $\sigma_1 = 1$，$\sigma_2 = 2$。

根据题意做假设检验模型

$$H_0: \mu_1 \le \mu_2,\quad H_1: \mu_1 > \mu_2,$$

与 $H_0: \mu_1 = \mu_2$，$H_1: \mu_1 > \mu_2$，有相同的拒绝域。

选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

当 H_0 成立时 $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$，

对于给定的显著性水平 $\alpha = 0.05$，找临界值 U_α，使得 $P(U > U_\alpha) = 0.05$，

$\Phi(U_\alpha) = 1 - \alpha = 0.95$，则 $U_\alpha = U_{0.05} = 1.645$。临界值为 1.645.

拒绝域为 $\{u > u_{0.05}\}$

根据样本数据计算

$\bar{x} = 170.75$，$\bar{y} = 169.5$

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{179{,}75\text{-}169.5}{\sqrt{\frac{1^2}{10} + \frac{2^2}{10}}} = 1.58 < 1.645,$$

没有落在拒绝域中，即在 $\alpha = 0.05$ 水平下，不可以认为早晨的身高比晚上的身高要高.