文科概率统计

3.4 随机变量及其分布

3.4.1 随机变量的概念

3.4.1 随机变量的概念

前面介绍了随机事件及其概率，从中可以看到许多随机事件都可以用数量来标识. 例如：掷一颗骰子试验所掷出的点数；抽样检查产品质量试验，出现的废品个数等. 对于那些没有采取数量标识的事件，我们也可以给它们用数量来标识. 例如：掷硬币试验，“出现正面”记为 1，“出现反面”记为 0；袋中有 3 个白球 2 个红球，从中任取 2 个球的试验，若取出 2 个红球记为 2，取出 1 个红球记为 1，取出 2 个白球记为 0 等. 这样，对于试验的结果就都可以用数量来描述了，即对于随机试验 E 的样本空间 Ω 中的样本点 ω，都可以使其与某个实数 $\xi(\omega)$ 相对应，这个随着 ω 的变化而变化的实数 $\xi(\omega)$ 即为随机变量.

定义 设 E 是一随机试验，它的样本空间是 $\Omega=\{\omega\}$，如果对于每一个 $\omega\in\Omega$，有实数 $\xi(\omega)$ 和它相对应，这样就得到一个定义在 Ω 上的单值实函数 $\xi(\omega)$（图 3.25），则称 $\xi(\omega)$ 为**随机变量**.

随机变量一般用 ξ、η、ζ 或 X、Y、Z 等表示.

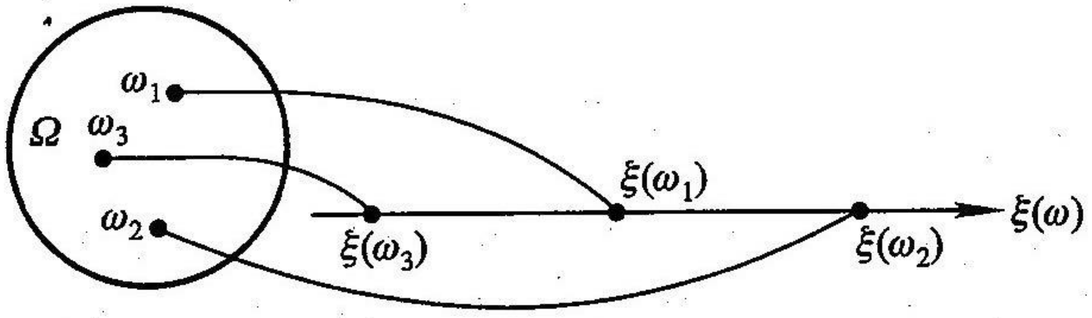


图 3.25

由定义知道，随机变量 X 是由样本空间 Ω 到实数轴的单值映射，而它的值随着试验的结果的不同而取不同的值，因此在试验之前只知道它可能的取值范围，而不知道其取什么值. 又由于试验的各个结果的出现是有一定的概率的，于是随机变量的取值也有一定的概率，这是随机变量与普通变量的本质区别.

例 3.4.1 掷硬币试验,掷出正面记为1分,掷出反面记为 0 分. 如果用 ξ 表示掷一次硬币的得分,则 ξ 是一个随机变量.

例 3.4.2 袋中装有分别标着1、2、3、4、5 的五个球,其中 1、2 号为红球,其余为白球,从中任取两球,则样本空间 Ω 为

$$\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}.$$

$$令\ \eta = \eta(\omega) = \begin{cases} 0, & 当\ \omega = \{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}, \\ 1, & 当\ \omega = \{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\}, \\ 2, & 当\ \omega = \{1,2\}. \end{cases}$$

则 η 是定义于 Ω 上的一个单值实函数,即随机变量,它描述了取到的红球数.

例 3.4.3 设某射手每次射击命中目标的概率是0.8，若其连续射击直到命中为止，其射击次数 X 的可能取值为 $1,2,\cdots$，即 X 可能取到任意一个正整数，此时 X 也是一个随机变量.

例 3.4.4 某公共汽车站每隔5分钟有一辆汽车通过. 若一位乘客在任一时刻到达车站都是等可能的，此时，他到达车站后的候车时间 Y 是一个随机变量，显然 Y 可以取到 $[0,5]$ 上的任一个值.

由此可见利用随机变量，可以表示出我们感兴趣的任何事件. 如例 3.4.2 中，"$\eta=1$"表示事件"取到一个红球"，"$\eta\leqslant 1$"表示事件"取到的红球数不超过1"；在例 3.4.3 中，"$X=5$"表示事件"第 5 次击中目标"；在例 3.4.4 中，"$Y>2$"表示事件"候车时间超过 2 分钟"等.

随机变量的行为、特征和性质，正是通过与其相联系的事件的性质及其概率来描绘的. 最常见的随机变量主要分两类，一类是离散型随机变量，一类是连续型随机变量.

3.4.2 离散型随机变量及其概率分布

定义 如果随机变量的全部取值为有限个或可列个(即取值个数与正整数 $\mathbf{N}_+$ 一一对应),则称此随机变量为**离散型随机变量**.

如例 3.4.1、例 3.4.2、例 3.4.3 中的随机变量就是离散型随机变量.

定义 设 ξ 是一个离散型随机变量,它的所有可能取值为 $x_i(i=1,2,\cdots)$. 若 ξ 取这些值的概率为

$$P(\xi = x_i) = p_i \qquad (i = 1,2,\cdots),$$

则称上式为离散型随机变量的**概率分布**(或**概率函数**),简称**分布**.

称概率分布的表格形式

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
$P(\xi=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

为离散型随机变量的**概率分布列**.

或也可记为

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

由概率性质知，p_i满足如下性质：

(1) $p_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots)$;

(2) $\sum_i p_i = 1$.

当给定了 x_i 及 $p_i (i = 1, 2, \cdots)$，我们就能很好地描述随机变量 ξ 了，因为我们已经知道了它所取的值，以及它取这些值的概率.

例 3.4.5 已知随机变量 ξ 的概率分布是

$$P(\xi = k) = C/2^k \qquad (k = 1,2,3),$$

求常数 C 的值.

解 由 $P(\xi=k)\geqslant 0$ 知 $C\geqslant 0$.

又由 $\sum\limits_{k=1}^{3} P(\xi = k) = 1$ 知

$$\sum_{k=1}^{3} P(\xi = k) = \sum_{k=1}^{3} \frac{C}{2^k} = 1, \qquad \text{即} \quad C\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2^k} = 1,$$

由此得到 $C=8/7$.

例 3.4.6 设袋中装有标号分别为0、1、1、2、2、2 的六个球，从中任取一个球，求取到球的标号数 ξ 的概率分布.

解 ξ 的可能取值是 0、1、2，由题意，它的概率分布为

$$P(\xi = 0) = 1/6, \quad P(\xi = 1) = 2/6, \quad P(\xi = 2) = 3/6.$$

即

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

设离散型随机变量X的概率分布为$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.1 & 0.3 & 0.6\end{pmatrix}$，则$P(X\leq\frac{3}{2})=$

设离散型随机变量X的概率分布为$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.1 & 0.3 & 0.6\end{pmatrix}$，则$P(X\leq\frac{3}{2})=$ _0.4_.

离散型随机变量的概率分布不仅明确地给出了随机变量 X 取值 x_i 的概率，而且对任意实数 $a<b$，事件 $\{a \leqslant X \leqslant b\}$ 发生的概率都可以由概率分布算出：

$$P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \sum_{a \leqslant x_k \leqslant b} P\{X = x_k\}.$$

例 3.4.7 设随机变量 ξ 的可能取值为 $-2,-1,0,1,2$，且

$$P(-1<\xi<2)=0.4, \qquad P(\xi=0)=0.3,$$

$$P(|\xi| \leqslant 1)=0.6, \qquad P(\xi \geqslant 2)=P(|\xi|=1).$$

试求 ξ 的概率分布列.

解 设随机变量 ξ 的概率分布列为

ξ	-2	-1	0	1	2
$P(\xi=x_i)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5

由 $P(-1<\xi<2)=0.4$ 可得 $P(\xi=0)+P(\xi=1)=p_3+p_4=0.4$；

由 $P(\xi=0)=0.3$ 可得 $p_3=0.3, p_4=0.1$；

由 $P(|\xi|\leqslant 1)=0.6$ 可得

$$P(\xi=-1)+P(\xi=0)+P(\xi=1)=p_2+p_3+p_4=0.6, p_2=0.2;$$

由 $P(\xi\geqslant 2)=P(|\xi|=1)$ 可得

$$P(\xi=2)=P(\xi=-1)+P(\xi=1), p_5=p_2+p_4=0.3;$$

再由离散型随机变量的概率分布性质可知

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1. \quad p_1=0.1;$$

因此 $p_1=0.1, p_2=0.2, p_3=0.3, p_4=0.1, p_5=0.3.$

从而可得所求分布列为

ξ	-2	-1	0	1	2
$P(\xi=x_i)$	0.1	0.2	0.3	0.1	0.3

设某射手有 5 发子弹，他连续向一目标射击，直到击中目标或子弹用完为止.已知其每次击中目标的概率为 0.8，设 X 为总共射击的次数，求

（1）X 的概率分布；（2）未用完子弹的概率；

（3）用完子弹且击中目标的概率.

设某射手有5发子弹，他连续向一目标射击，直到击中目标或子弹用完为止.已知其每次击中目标的概率为0.8，设X为总共射击的次数，求

（1）X的概率分布；（2）未用完子弹的概率；

（3）用完子弹且击中目标的概率.

解：(1)X的所有可能取值1，2，3，4，5

$P(X=1)=0.8$, $P(X=2)=0.2*0.8$, $P(X=3)=0.2^2*0.8$, $P(X=4)=0.2^3*0.8$, $P(X=5)=0.2^4$；

(2)$P(X\le4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1-P(X=5)=0.9984$；

(3)$P=0.2^4*0.8=0.00128$。

3.4.3 常见离散型随机变量的概率分布

1. 两点分布或(0－1)分布

定义 若随机变量ξ的概率分布为

$$P(\xi = 1) = p, P(\xi = 0) = 1 - p = q, \quad 其中 0 < p < 1,$$

则称随机变量ξ服从**两点分布**(或(0－1)**分布**),记为$\xi \sim (0-1)$.

例 3.4.8 掷一颗骰子的试验,观察其出现的点数,令

$$\xi = \begin{cases} 1, 出现的点数大于 2, \\ 0, 出现的点数不大于 2. \end{cases}$$

则有 $P(\xi=1)=2/3$, $P(\xi=0)=1/3$.

故随机变量ξ服从两点分布.

2. 二项分布

定义 若随机变量 ξ 的分布为

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0,1,2,\cdots,n),$$

其中 $0 < p < 1$,则称随机变量 ξ 服从以 n、p 为参数的**二项分布**,记为 $\xi \sim B(n,p)$.

显然,概率 $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 就是 n 重伯努利试验中事件 A 恰发生 k 次的概率,且两点分布就是二项分布在 $n=1$ 时的特殊情况.

例 3.4.9 从家中乘汽车到学校的途中有3个交通岗，假设在每个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 1/3，设 X 为途中遇到红灯的次数，求随机变量 X 的概率分布列.

解 由于在每个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，且概率都是 1/3，不遇到红灯的概率为 2/3，则 X 的可能取值为 0、1、2、3 且

$$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27},$$

$$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},$$

$$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9},$$

$$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}.$$

X 的概率分布列为

X	0	1	2	3
$P(X=i)$	8/27	4/9	2/9	1/27

设$X \sim B(2, p), Y \sim B(3, p)$，且$P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$，求$P\{Y \geq 1\}$.

设 $X \sim B(2,p), Y \sim B(3,p)$，且 $P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$，求 $P\{Y \geq 1\}$.

解： 因为 $X \sim B(2,p), Y \sim B(3,p)$

$P(X \geq 1) = \frac{5}{9}$，所以 $P(X = 0) = 1 - P(X \geq 1) = C_2^0 p^0 (1-p)^2 = \frac{4}{9}$，

故 $p = \frac{1}{3}$.

又 $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - C_3^0 p^0 (1-p)^3 = \frac{19}{27}$·。

例 3.4.10 临床观察表明,某药物产生副作用的概率为 2‰,现有 1 000 例患者服用该药,试求出现副作用的患者人数 X 的概率分布.

解 任一患者服用该药产生副作用的概率 $p=0.002$,每一位患者服药后是否产生副作用是相互独立的,因此 1 000 例患者服药后出现副作用的患者人数 X 的可能取值为 $0,1,2,\cdots,1000$,且

$$P(X=k)=C_{1000}^{k}(0.002)^{k}(0.998)^{1000-k},k=0,1,2,\cdots,1000.$$

这时若求 $X=3$ 的概率,它的数值计算较繁,将在下面要介绍的泊松分布中解决.

3. 泊松(Poisson)分布

定义 若随机变量 ξ 的概率分布为

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (k = 0,1,2,\cdots,),$$

其中 $\lambda>0$ 为常数,则称 ξ 服从参数为 λ 的**泊松**(Poisson[**法**],**1781—1840**)**分布**,记为 $\xi \sim P(\lambda)$.

泊松分布是描述大量重复试验中每次发生的可能性很小的事件出现次数的一种概率分布模型.

在客观世界中,服从泊松分布的随机变量是常见的,如在一段时间内,电话交换台收到的呼唤数;一页书中印刷错误出现的个数;公共汽车站到来的乘客数等都服从或近似服从泊松分布. 泊松分布的另一个重要意义是能作为二项分布的近似.

由前面的例 3.4.10 可以看到，在二项分布的计算中，常因 n 很大，p 很小计算起来很困难，在数学上可以证明，当 n 充分大而 p 很小时（一般 $n>10$，$p<0.1$），二项分布 $B(n,p)$ 的概率函数近似等于泊松分布 $P(\lambda)$ 的概率函数，即（$\lambda=n\times p$）

$$\lim_{n\to\infty}C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

泊松分布的方便之处是有现成的分布表可查（见附表 1）.

附表1　泊松分布数值表

$$P\{\xi = m\} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

m \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	0.904 8	0.818 7	0.740 8	0.670 3	0.606 5	0.548 8	0.496 6	0.449 3	0.406 6	0.367 9	0.223 1	0.135 3	0.082 1	0.049 8
1	0.090 5	0.163 7	0.222 3	0.268 1	0.303 3	0.329 3	0.347 6	0.359 5	0.365 9	0.367 9	0.334 7	0.270 7	0.205 2	0.149 4
2	0.004 5	0.016 4	0.033 3	0.053 6	0.075 8	0.098 8	0.121 6	0.143 8	0.164 7	0.183 9	0.251 0	0.270 7	0.256 5	0.224 0
3	0.000 2	0.001 1	0.003 3	0.007 2	0.012 6	0.019 8	0.028 4	0.038 3	0.049 4	0.061 3	0.125 5	0.180 5	0.213 8	0.224 0
4		0.000 1	0.000 3	0.000 7	0.001 6	0.003 0	0.005 0	0.007 7	0.011 1	0.015 3	0.047 1	0.090 2	0.133 6	0.168 1
5				0.000 1	0.000 2	0.000 3	0.000 7	0.001 2	0.002 0	0.003 1	0.014 1	0.036 1	0.066 8	0.100 8
6							0.000 1	0.000 2	0.000 3	0.000 5	0.003 5	0.012 0	0.027 8	0.050 4
7										0.000 1	0.000 8	0.003 4	0.009 9	0.021 6
8											0.000 2	0.000 9	0.003 1	0.008 1
9												0.000 2	0.000 9	0.002 7
10													0.000 2	0.000 8
11													0.000 1	0.000 2
12														0.000 1

在例 3.4.10 中 $\lambda = n \times p = 1000 \times 0.002 = 2$，查附表 1 得

$$P(X = 3) = \frac{2^3}{3!}e^{-2} \approx 0.180\ 5$$

我们把 $k=0,1,2,\cdots,9$ 的二项分布与泊松分布的结果列表如下：

样品中的次品数 X	二项分布 $B(1000,0.002)$	泊松分布 $P(2)$
0	0.135 1	0.135 3
1	0.270 7	0.270 7
2	0.270 9	0.270 7
3	0.180 6	0.180 5
4	0.090 2	0.090 2
5	0.036 0	0.036 1
6	0.012 0	0.012 0
7	0.003 4	0.003 4
8	0.000 8	0.000 9
9	0.000 2	0.000 2

由上表可以看出，两种分布对应的概率是相当近似的.

3.4.4 连续型随机变量

除"一个一个地取值"的离散型随机变量外，还有一类"连续地取值"的随机变量，如人的身高、体重、随机测量的结果等，它们的取值充满某个区间，这时考虑它们取值于一点的概率往往意义不大，而只有知道取值于任一区间上的概率才能掌握其取值的概率分布.

定义 对于随机变量 X，如果存在非负可积函数 $p(x), x \in (-\infty, +\infty)$，使得 X 取值于任一区间 (a,b) 的概率为

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$$

则称 X 为连续型随机变量，并称 $p(x)$ 为 X 的概率分布密度函数，简称分布密度函数或密度函数.

由定积分的几何意义可知，$P\{a < X < b\} = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$ 在数值上正是由曲线 $y = p(x), x = a, x = b$ 及 x 轴所围曲边梯形的面积.（如图 3.26 所示）

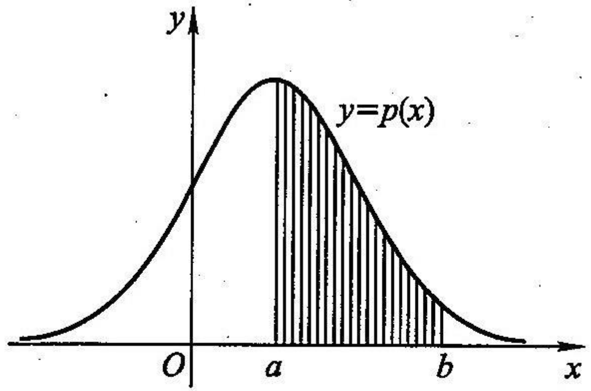


图 3.26

分布密度函数 $p(x)$ 有下列性质：

(1) $p(x)\geqslant 0$.（由定义可知）.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = P\{-\infty < X < +\infty\} = P(\Omega) = 1.$

(3) 对任意实数 a，$P\{X=a\}=0$.

即连续型随机变量取任一常数值 a 的概率为 0，这点与离散型随机变量截然不同，因此，用列举连续型随机变量取某个值的概率来描述这种随机变量是毫无意义的. 同时，一个事件的概率等于 0，这事件并不一定是不可能事件；同样地，一个事件的概率等于 1，这事件也不一定是必然事件.

由此可知：

$$P\{a < X \leqslant b\} = P\{a \leqslant X < b\} = P\{a \leqslant X \leqslant b\}$$
$$= P\{a < X < b\} = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 3.4.11 设连续型随机变量 X 的概率密度为：

$$p(x)=\begin{cases} ax, & 1\leqslant x\leqslant 3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求(1) 常数 a 的值;(2) 随机变量 X 落在[0,2]内的概率.

解 (1) 利用密度函数的性质：$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x=1$,

而
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} p(x)\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{1}^{3} ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}ax^2 \Big|_1^3 = 4a$$

故 $4a=1$ 即 $a=\dfrac{1}{4}$

(2) $$P\{0\leqslant X\leqslant 2\} = \int_0^2 p(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{4}x\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{8}x^2\Big|_1^2=\frac{3}{8}.$$

设随机变量 X 的概率密度为，$p(x)=\begin{cases} ax+b & 0<x<2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

且 $P\{1<X<3\}=0.25$，求常数 a 和 b，并计算 $P\{X>\frac{3}{2}\}$.

解：　利用密度函数的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$

可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_0^2 (ax+b)dx = 2a+2b$，

即 $2a+2b=1$ ①

又由已知 $P\{1<X<3\}=0.25$

而 $P\{1<X<3\} = \int_1^3 p(x)dx = \int_1^2 (ax+b)dx = \frac{3}{2}a+b$，

即 $\frac{3}{2}a+b=0.25$ ②

解①②可得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=1$.

且 $P\{X>\frac{3}{2}\} = \int_{3/2}^{+\infty} p(x)dx = \int_{1.5}^2 (-\frac{1}{2}x+1)dx = \frac{1}{16}$.

例 3.4.12 已知连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}Ae^{-x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

求(1)系数 A;(2) 随机变量 X 落在区间(0,1)的概率.

解 (1) 利用密度函数的性质: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1.$

而
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}Ae^{-x}\mathrm{d}x$$
$$=-Ae^{-x}\Big|_{0}^{+\infty}=A$$

故
$$A=1$$

$$(2)\ P\{0<X<1\}=\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}e^{-x}\mathrm{d}x$$
$$=-e^{-x}\Big|_{0}^{1}=1-e^{-1}.$$

3.4.5 常见连续型随机变量的分布

1. 均匀分布

定义 若随机变量 ξ 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 ξ 服从 $[a,b]$ 上的**均匀分布**，记为 $\xi\sim U[a,b]$.

均匀分布的密度函数如图 3.27 所示.

若随机变量 ξ 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布，那么对于任意满足 $a\leqslant c<c+l\leqslant b$ 的 $c,c+l$，由密度函数的性质有

$$P(c<\xi<c+l)=\int_c^{c+l}p(x)\,\mathrm{d}x=\frac{l}{b-a}.$$

即随机变量 ξ 取值于 $[a,b]$ 中任一子区间的概率与该子区间的长度成正比，而与小区间的位置无关，因而称为均匀分布.

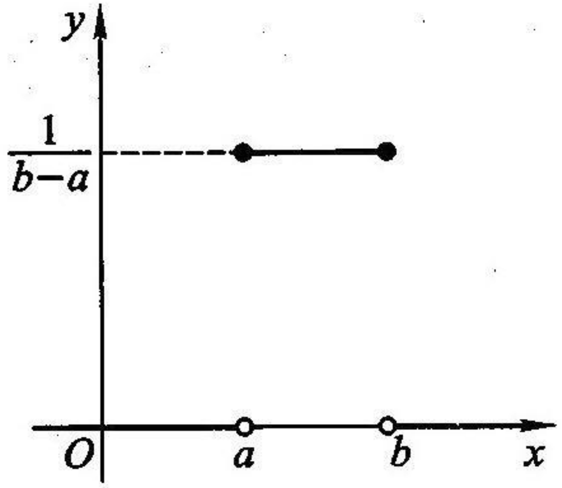


图 3.27

2. 正态分布

正态分布是概率论中最重要的一种分布. 理论研究表明,一个变量如果受到了大量的随机因素的影响,而各个因素所起的作用又都很微小时;这样的随机变量一般都服从正态分布. 正态分布在客观世界中有着广泛的应用,通常随机变量的取值范围较集中,呈现"中间大,两头小"现象,如学生成绩分布,测量误差的分布,同龄人的身高和体重的分布等都是服从正态分布.

定义 如果随机变量 ξ 的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty<x<+\infty),$$

其中 μ、σ 均为常数，且 $\sigma>0$，则称 ξ 服从以 μ、σ 为参数的**正态分布**，记为 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$. 正态分布的密度曲线如图 3.28所示.

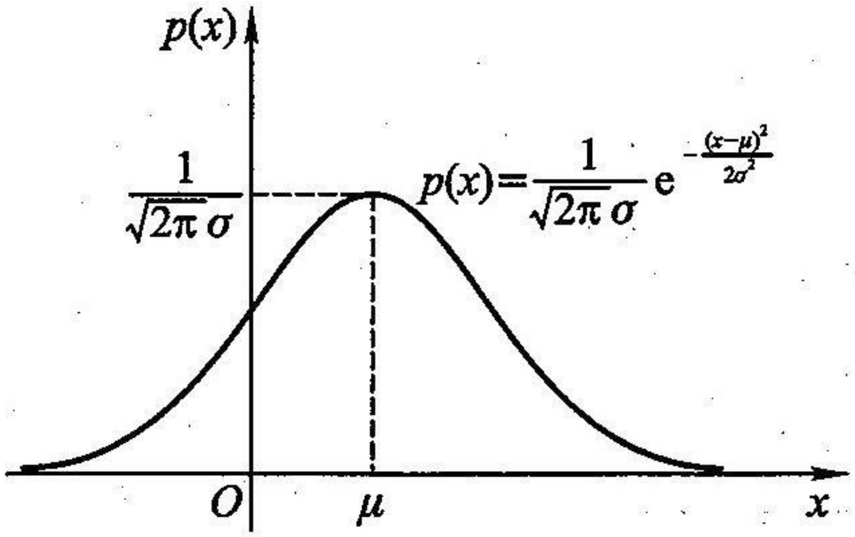


图 3.28

利用微积分知识，我们可以证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1.$$

并且能得到如下结果：正态分布的密度函数的图形是关于直线 $x=\mu$ 对称的；在 $x=\mu$ 处达到最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$；当 $x\to\pm\infty$ 时，曲线以 x 轴为渐近线。

在正态分布的密度函数中有两个常数 μ 和 σ，若固定 σ 的值而 μ 变化时，则密度曲线的形状不变，它沿着 x 轴方向平行移动（见图 3.29）。

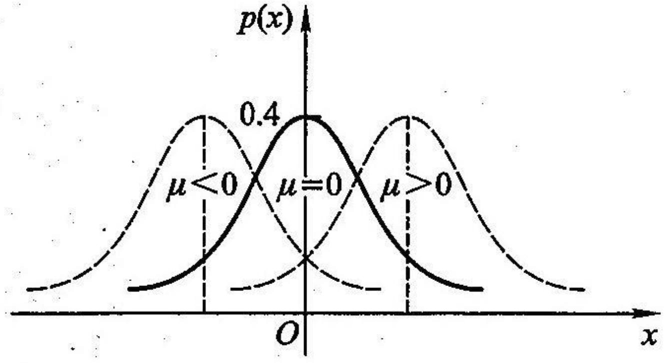


图 3.29

若固定 μ 的值而 σ 变化时，则密度曲线的形状将改变，当 σ 大时曲线平缓，当 σ 小时曲线陡峭，分布集中在 $x=\mu$ 附近(图 3.30).

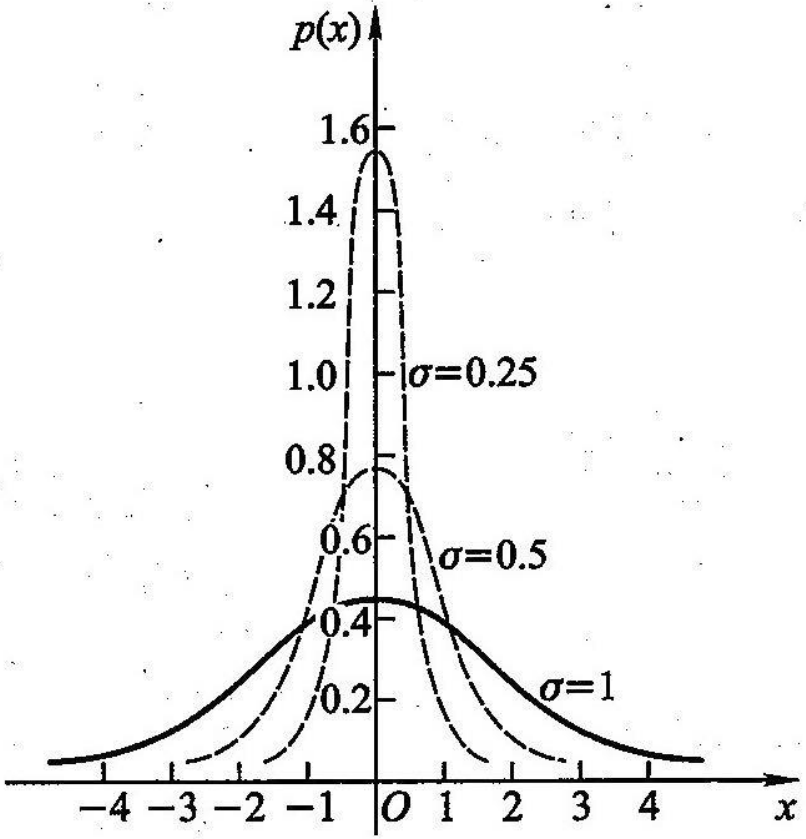


图 3.30

特别地，当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，称其为标准正态分布，其密度函数为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad(-\infty<x<+\infty),$$

记为 $\xi\sim N(0,1)$. 它的密度曲线关于 y 轴对称如图 3.31 所示.

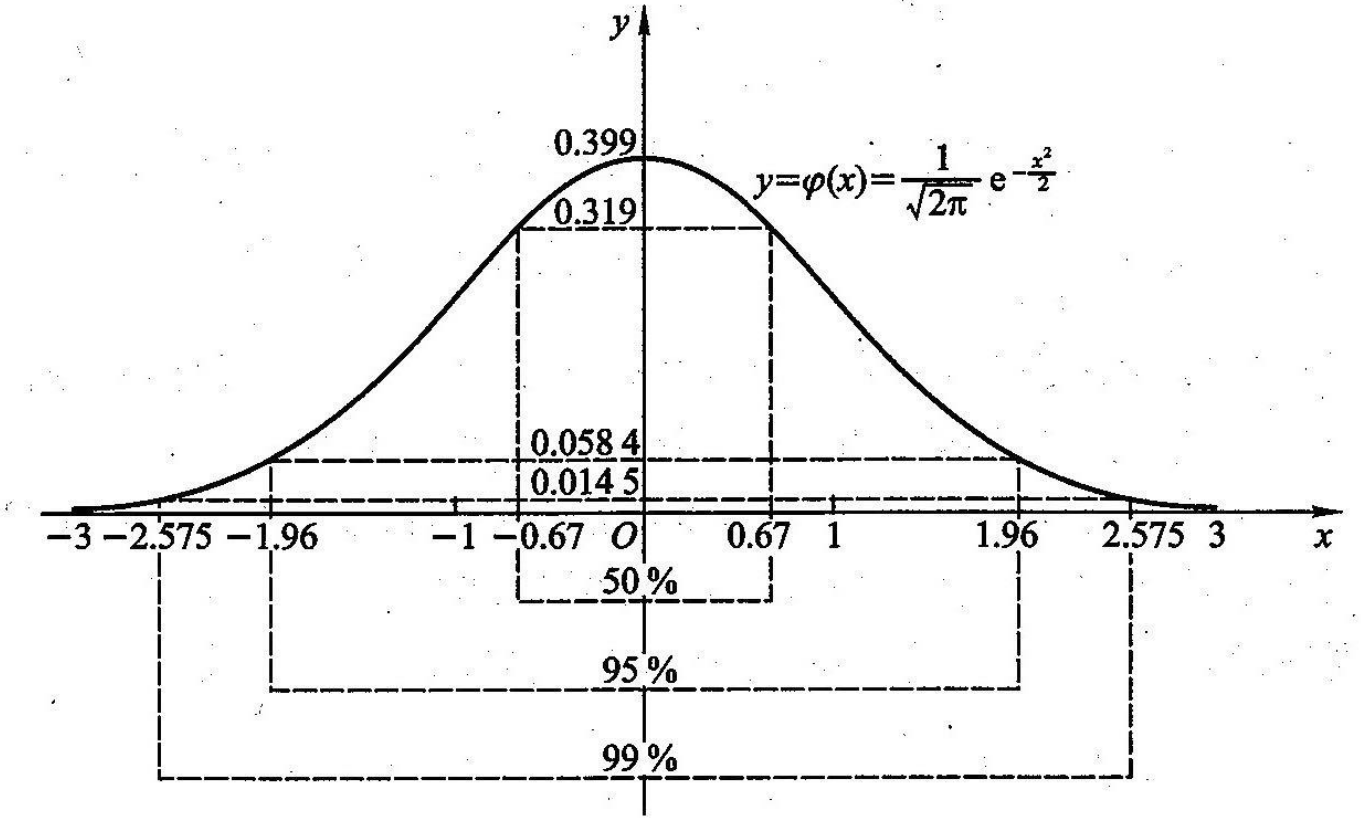


图 3.31

设随机变量 $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$，且密度函数为 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}$， $(-\infty<x<+\infty)$

则 $\sigma^2=$

设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，且密度函数为 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}$，$(-\infty < x < +\infty)$

则 $\sigma^2 = \underline{\ 3\ }$

设$X \sim N$（3，2^2），若有常数c使$P\{X > c\} = P\{X \le c\}$成立，则$c$=

设X~N（3，2^2），若有常数c使$P\{X > c\} = P\{X \le c\}$成立，则$c=$__3__

设随机变量ξ服从标准正态分布$N(0,1)$，若$P(0<\xi<1)=p$，则

$P(-1<\xi<0)=$

设随机变量 ξ 服从标准正态分布 $N(0,1)$，若 $P(0<\xi<1)=p$，则

$P(-1<\xi<0)=p$

若随机变量 $X \sim N(0,1)$，对任意实数 x.

$$P\{X<x\} = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

对于不同实数 x，得到不同的概率，确定新的函数，称其为随机变量 X 的分布函数，记为

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

其几何意义是密度曲线 $y=\varphi(x)$ 在积分区间 $(-\infty, x)$ 上的面积.

当 $x \to +\infty$ 时，$\Phi(x) \to 1$；当 $x \to -\infty$ 时，$\Phi(x) \to 0$.

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

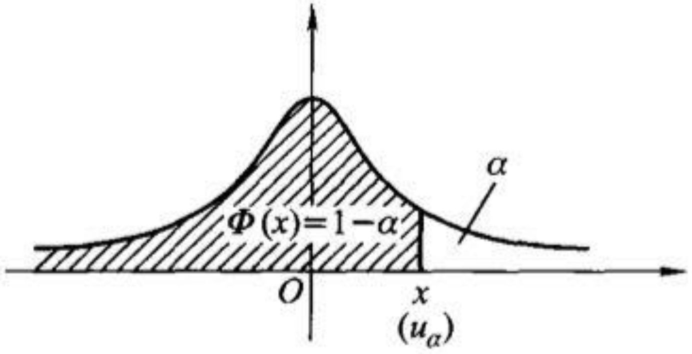
又由标准正态分布的密度曲线的对称性可知：$\Phi(0) = \frac{1}{2}$，当 $a > 0$ 时，$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$.

由于正态分布在概率计算中的重要性，人们已经编制了标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数的数值表（附表 2），即当 $x > 0$ 时，$\Phi(x)$ 值可从附表 2 中查出.

附表 2　标准正态分布函数数值表

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$



$\Phi(x)$ \ x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500 0	0.504 0	0.508 0	0.512 0	0.516 0	0.519 9	0.523 9	0.527 9	0.531 9	0.535 9
0.1	0.539 8	0.543 8	0.547 8	0.551 7	0.555 7	0.559 6	0.563 6	0.567 5	0.571 4	0.575 3
0.2	0.579 3	0.583 2	0.587 1	0.591 0	0.594 8	0.598 7	0.602 6	0.606 4	0.610 3	0.614 1
0.3	0.617 9	0.621 7	0.625 5	0.629 3	0.633 1	0.636 8	0.640 6	0.644 3	0.648 0	0.651 7
0.4	0.655 4	0.659 1	0.662 8	0.666 4	0.670 0	0.673 6	0.677 2	0.680 8	0.684 4	0.687 9
0.5	0.691 5	0.695 0	0.698 5	0.701 9	0.705 4	0.708 8	0.712 3	0.715 7	0.719 0	0.722 4
0.6	0.725 7	0.729 1	0.732 4	0.735 7	0.738 9	0.742 2	0.745 4	0.748 6	0.751 7	0.754 9
0.7	0.758 0	0.761 1	0.764 2	0.767 3	0.770 3	0.773 4	0.776 4	0.779 4	0.782 3	0.785 2
0.8	0.788 1	0.791 0	0.793 9	0.796 7	0.799 5	0.802 3	0.805 1	0.807 8	0.810 6	0.813 3
0.9	0.815 9	0.818 6	0.821 2	0.823 8	0.826 4	0.828 9	0.831 5	0.834 0	0.836 5	0.838 9
1.0	0.841 3	0.843 8	0.846 1	0.848 5	0.850 8	0.853 1	0.855 4	0.857 7	0.859 9	0.862 1

1. 1	0. 864 3	0. 866 5	0. 868 6	0. 870 8	0. 872 9	0. 874 9	0. 877 0	0. 879 0	0. 881 0	0. 883 0
1. 2	0. 884 9	0. 886 9	0. 888 8	0. 890 7	0. 892 5	0. 894 4	0. 896 2	0. 898 0	0. 899 7	0. 901 5
1. 3	0. 903 2	0. 904 9	0. 906 6	0. 908 2	0. 909 9	0. 911 5	0. 913 1	0. 914 7	0. 916 2	0. 917 7
1. 4	0. 919 2	0. 920 7	0. 922 2	0. 923 6	0. 925 1	0. 926 5	0. 927 8	0. 929 2	0. 930 6	0. 931 9
1. 5	0. 933 2	0. 934 5	0. 935 7	0. 937 0	0. 938 2	0. 939 4	0. 940 6	0. 941 8	0. 943 0	0. 944 1
1. 6	0. 945 2	0. 946 3	0. 947 4	0. 948 4	0. 949 5	0. 950 5	0. 951 5	0. 952 5	0. 953 5	0. 954 5
1. 7	0. 955 4	0. 956 4	0. 957 3	0. 958 2	0. 959 1	0. 959 9	0. 960 8	0. 961 6	0. 962 5	0. 963 3
1. 8	0. 964 1	0. 964 8	0. 965 6	0. 966 4	0. 967 1	0. 967 8	0. 968 6	0. 969 3	0. 970 0	0. 970 6
1. 9	0. 971 3	0. 971 9	0. 972 6	0. 973 2	0. 973 8	0. 974 4	0. 975 0	0. 975 6	0. 976 2	0. 976 7
2. 0	0. 977 2	0. 977 8	0. 978 3	0. 978 8	0. 979 3	0. 979 8	0. 980 3	0. 980 8	0. 981 2	0. 981 7
2. 1	0. 982 1	0. 982 6	0. 983 0	0. 983 4	0. 983 8	0. 984 2	0. 984 6	0. 985 0	0. 985 4	0. 985 7
2. 2	0. 986 1	0. 986 4	0. 986 8	0. 987 1	0. 987 4	0. 987 8	0. 988 1	0. 988 4	0. 988 7	0. 989 0
2. 3	0. 989 3	0. 989 6	0. 989 8	0. 990 1	0. 990 4	0. 990 6	0. 990 9	0. 991 1	0. 991 3	0. 991 6
2. 4	0. 991 8	0. 992 0	0. 992 2	0. 992 5	0. 992 7	0. 992 9	0. 993 1	0. 993 2	0. 993 4	0. 993 6
2. 5	0. 993 8	0. 994 0	0. 994 1	0. 994 3	0. 994 5	0. 994 6	0. 994 8	0. 994 9	0. 995 1	0. 995 2

若随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

且

$$P\{a \leqslant X \leqslant b\} = P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant Y \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

例 3.4.13 设随机变量 $X \sim N(1,4)$,求 $P\{0<X<1.5)$ 及 $P\{|X| \leqslant 4.0\}$.

解 因为 $X \sim N(1,4)$ $\mu=1, \sigma=2$

所以

$$
\begin{aligned}
P\left\{0<X<1.5\right\} &= P\left\{\frac{0-1}{2}<\frac{X-1}{2}<\frac{1.5-1}{2}\right\} \\
&= P\left\{-0.5<\frac{X-1}{2}<0.25\right\} \\
&= \Phi(0.25)-\Phi(-0.5) \\
&= \Phi(0.25)-(1-\Phi(0.5)) \quad \text{(查附表 2)} \\
&= 0.5987-(1-0.6915)=0.2902.
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
P\left\{|X| \leqslant 4.0\right\} &= P\left\{-4.0 \leqslant X \leqslant 4.0\right\} \\
&= P\left\{\frac{-4.0-1}{2} \leqslant \frac{X-1}{2} \leqslant \frac{4.0-1}{2}\right\} \\
&= \Phi(1.5)-\Phi(-2.5) \\
&= \Phi(1.5)-(1-\Phi(2.5)) \\
&= 0.9332-(1-0.9938)=0.927
\end{aligned}
$$

3.4.6 正态分布的一些简单应用

例 3.4.15 某单位招聘 2 500 人，按考试成绩从高分到低分依次录用．共有 10 000 人报名应聘，假设报名者的考试成绩 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，已知 90 分以上有 359 人，60 分以下有 1 151 人，问被录用者中最低分为多少？

解 $$X\sim N(\mu,\sigma^2)$$

已知 $P(X>90)=0.035\ 9$，$P(X<60)=0.115\ 1$

故 $$P(X\leqslant 90)=0.964\ 1$$

而 $P(X\leqslant 90)=P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\dfrac{90-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\dfrac{90-\mu}{\sigma}\right)$

故 $$\Phi\left(\frac{90-\mu}{\sigma}\right)=0.964\ 1$$

查附表 2 $$\frac{90-\mu}{\sigma}=1.8 \qquad ①$$

又 $P(X<60)=P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}<\dfrac{60-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\dfrac{60-\mu}{\sigma}\right)$

故 $$\Phi\left(\frac{60-\mu}{\sigma}\right)=0.115\ 1$$

查附表 2： $$\frac{\mu-60}{\sigma}=1.2 \qquad ②$$

解①②得： $\mu=72,\sigma=10.$

录用率$\frac{2\ 500}{10\ 000}=0.25$.

设录用者中最低分为 x_0分

故
$$P\{X\leqslant x_0\}=0.75$$

而 $P\{X\leqslant x_0\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{x_0-\mu}{\sigma}\right\}$

$$=\Phi\left(\frac{x_0-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x_0-72}{10}\right)$$

故
$$\Phi\left(\frac{x_0-72}{10}\right)=0.75$$

查附表 2.
$$\frac{x_0-72}{10}=0.675$$

故
$$x_0=78.75\approx 79$$

即录用者中最低分为 79 分.

例 3.4.16 设某城市男子身高 X 近似服从正态分布 $N(172,36)$（单位：cm）.（1）问应如何选择公共汽车车门的高度使男子与车门碰头的机会小于 0.01？（2）若车门高185 cm，求 100 个男子中与车门碰头的人数不多于 2 个的概率.

解 因为 $X\sim N(172,36)$，（近似地）

令 $Z=(X-172)/6\sim N(0,1)$.（近似地）

（1）设公共汽车车门的高度为 x cm，由题意

$P(X\geqslant x)<0.01$，而

$$\begin{aligned}P(X\geqslant x)&=P\left(\frac{X-172}{6}\geqslant\frac{x-172}{6}\right)\\&=1-P\left(\frac{X-172}{6}<\frac{x-172}{6}\right)\\&=1-P\left(\frac{X-172}{6}\leqslant\frac{x-172}{6}\right)\\&=1-\Phi((x-172)/6)<0.01,\end{aligned}$$

即

$$\Phi\left(\frac{x-172}{6}\right)>0.99.$$

反查标准正态分布函数值表(附表 2)得

$$\frac{x-172}{6}>2.33,$$

故

$$x>185.98.$$

即车门高度应大于 185.98 cm.

(2) 任一男子,其身高超过 185 cm 的概率为

$$\begin{aligned}p&=P(X>185)=P\left(\frac{X-172}{6}>\frac{185-172}{6}\right)\\&=1-P\left(\frac{X-172}{6}\leqslant\frac{185-172}{6}\right)\\&=1-\Phi\left(\frac{185-172}{6}\right)\\&=1-\Phi(2.17).\end{aligned}$$

查表得

$$p=1-0.985=0.015.$$

对于任一男子，其身高超过 185 cm 的概率是 0.015，且每人身高是否超过 185 cm 是相互独立的. 设 Z 为 100 个男子中身高超过 185 cm 的人数，故

$$Z \sim B(100, 0.015).$$

根据二项分布的概率分布

$$P(Z = k) = C_{100}^{k} 0.015^{k} (1 - 0.015)^{100-k},$$

所求概率为

$$P(Z \leqslant 2) = P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2).$$

在计算上述概率时，n 较大（$n = 100$），p 较小（$p = 0.015$），因此用泊松分布近似代替二项分布，此时 $\lambda = n \times p = 1.5$，查泊松分布数值表（附表 1）得

$$P(Z = 0) = 0.223\ 1,$$

$$P(Z = 1) = 0.334\ 7,$$

$$P(Z = 2) = 0.251\ 0,$$

故 $$P(Z \leqslant 2) = 0.223\ 1 + 0.334\ 7 + 0.251\ 0 = 0.808\ 8.$$

3. 正态分布在产品质量管理中的应用

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则有

$$
\begin{aligned}
& P\{|X-\mu|<k\sigma\} \\
&= P\{\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma\} \\
&= \Phi\left(\frac{(\mu+k\sigma)-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{(\mu-k\sigma)-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi(k)-\Phi(-k)=2\Phi(k)-1
\end{aligned}
$$

令 $k=3,6$ 分别得到

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}=2\Phi(3)-1\approx 0.997\ 4$$

$$P\{|X-\mu|<6\sigma\}=2\Phi(6)-1\approx 0.999\ 996\ 6$$

上述计算表明，服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量 X，取值落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内的概率为 99.74%，落在 $(\mu-6\sigma,\mu+6\sigma)$ 之外的概率为 0.000 003 4 即百万分之 3.4，这几乎是不可能事件．“6σ”的目标就是产品和顾客服务的缺陷率应控制在百万分之 3.4 之内．