# 文科高等数学

## 2.2 矩阵及其运算

# 2.2.1 矩阵的概念

**定义** 我们将形如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的矩形数表,称为 $m \times n$ 阶矩阵,其中 $m$ 与 $n$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数和列数,矩阵中的第 $i$ 行与第 $j$ 列$(1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n)$处的 $a_{ij}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素,当 $m = n$ 时,$\boldsymbol{A}$ 特别称为 $n$ 阶方阵或 $n$ 阶矩阵. 当 $m = n = 1$ 时,矩阵就是一个数,不再加括号表示.

一般用大写的黑体拉丁字母表示矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等，有时矩阵也可以简写成 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素为 $a_{ij}$，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$.

两个 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 称为相等的，如果 $a_{ij}=b_{ij}(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 注意，行数或列数不等的矩阵绝不能相等.

**例 2.2.3**

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的 $mn$ 个元素均为 0，则称 $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，常简记为 $\boldsymbol{O}$，而不标明下标 $m\times n$.

如果把 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的第 $i$ 行改为第 $i$ 列，第 $j$ 列改为第 $j$ 行，则可以得到一个新的 $n\times m$ 矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置（矩阵），具体表示如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

显然，$n$ 阶方阵的转置仍是 $n$ 阶方阵，而且对任何矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

**例 2.2.2** 对于 $n$ 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

由方程组左端 $mn$ 个系数(缺省的算 0)相互位置不变所得到的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为方程组的系数矩阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称为线性方程的增广矩阵

# 2.2.2 矩阵的加减和倍数

**1. 矩阵的加减**

两个行数相同列数也相同的矩阵称为同型矩阵,只有同型矩阵才可以做加减法.做加法时,把两矩阵中对应位置处的元素相加,和数放在原位置处,即得到行列数不变的新矩阵,称为原来两矩阵的和,对于减法即两矩阵的差,可以类似地定义.

**定义** 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$
A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix};
$$

两矩阵的差为矩阵

$$
A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.
$$

矩阵的加（减）运算转化为对应元素（即实数）的加（减）运算

容易验证,矩阵的加法具有下列基本性质:

(1) 交换性 $A+B=B+A$.

(2) 结合性 $(A+B)+C=A+(B+C)$.

(3) 零矩阵的单位性 $A+O=O+A=A$

(零矩阵:所有元素均为 0 的矩阵).

(4) 保持转置性 $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$.

(5) 负矩阵的存在性 即对任意矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{称} \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 $A$ 的负矩阵,记作 $-A$,且有 $A+(-A)=(-A)+A=O$.

显然,若 $A$ 与 $B$ 是同型矩阵,则 $A-B=A+(-B)$.

**定义** 设 $k$ 为一实数,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 倍(或称为 $\boldsymbol{A}$ 与数 $k$ 的数乘)是与 $\boldsymbol{A}$ 同型的矩阵:

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

容易验证,对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$,我们有 $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$,$(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$,并且矩阵与数的乘法具有下列基本性质:

(1) 对加法的分配性 $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$,$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

(2) 结合性 $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}=l(k\boldsymbol{A})$.

(3) 保持转置性 $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

矩阵的倍数运算转化为实数的乘法运算.

**例 2.2.4** 已知

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 8\\ 2 & 4 & 6 & 9\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}7 & 4 & -3 & 3\\ 3 & 1 & 0 & 7\\ 5 & 2 & 3 & 9\end{pmatrix},$$

且 $A+3X=B$,求矩阵 $X$.

**解** 由 $A+3X=B$ 得 $3X=B-A$,所以

$$X=\frac{1}{3}(B-A)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7-3 & 4-(-2) & -3-2 & 3-0\\ 3-1 & 1-3 & 0-0 & 7-8\\ 5-2 & 2-4 & 3-6 & 9-9\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 6 & -5 & 3\\ 2 & -2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & 2 & -\frac{5}{3} & 1\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\\ 1 & -\frac{2}{3} & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

# 2.2.3 矩阵的乘法

**定义** 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$，$\boldsymbol{B}=(b_{jk})_{np}$ 分别是 $m\times n$，$n\times p$ 矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一 $m\times p$ 矩阵，记为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为左阵，$\boldsymbol{B}$ 称为右阵，且乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中第 $i$ 行第 $k$ 列处元素为

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}$$

矩阵的乘法似乎非常复杂，但是注意观察不难发现，把 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 个行向量与 $\boldsymbol{B}$ 的第 $k$ 个列向量（都是矩阵）相乘，就得到 $1\times 1$ 阶矩阵，也就是一个数

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk},$$

此数恰巧就是矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的第 $i$ 行第 $k$ 列元素 $c_{ik}$. 这就是说矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的第 $i$ 行第 $k$ 列元素就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 个行向量与 $\boldsymbol{B}$ 的第 $k$ 个列向量的乘积.

由定义可以看出，在矩阵乘法中，左阵总是以行为单位参加运算，而右阵总是以列为单位参加运算

例 2.2.6 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

求 $AB$ 与 $BA$.

解 $AB=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$, 而 $BA=\begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{pmatrix}$.

**例 2.2.7** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4 & 1\\ -1 & 2 & 2 & 0\\ 4 & 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{AB}$.

**解** 此处 $\boldsymbol{A}$ 是 $2\times3$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $3\times4$ 矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数, 故 $\boldsymbol{AB}$ 有意义, 其积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 应是 $2\times4$ 矩阵. 据定义有

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=$$

$$\begin{bmatrix}1\cdot2+3\cdot(-1)+(-2)\cdot4 & 1\cdot(-3)+3\cdot2+(-2)\cdot5 & 1\cdot4+3\cdot2+(-2)\cdot1 & 1\cdot1+3\cdot0+(-2)\cdot1\\ 4\cdot2+(-1)\cdot(-1)+5\cdot4 & 4\cdot(-3)+(-1)\cdot2+5\cdot5 & 4\cdot4+(-1)\cdot2+5\cdot1 & 4\cdot1+(-1)\cdot0+5\cdot1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-9 & -7 & 8 & -1\\ 29 & 11 & 19 & 9\end{pmatrix}$$

**例 2.2.8** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$.

**解**

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64 & 128\\ -32 & -64\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由例 2.2.8 可见，一般说来，矩阵的乘法是不可交换的，甚至像例 2.2.6 中那样，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 是两个完全不同型的矩阵．从例 2.2.7 来看，更有甚之，即使 $\boldsymbol{AB}$ 是可乘的，但 $\boldsymbol{BA}$ 就根本无意义了．此外，例 2.2.8 的乘积 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，说明两个均非零的矩阵，其乘积可能等于零．

矩阵的乘法具有下列基本性质：

（1）结合性　$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

（2）对加法的分配性　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$.

（3）对数乘的结合性　$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

（4）关于转置　$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

**4. 单位矩阵**

在矩阵的乘法中，有一种矩阵起着特殊的作用，如同数的乘法中的 1，称这种矩阵为**单位矩阵**. 它是个方阵，除左上角到右下角的对角线（称为主对角线）上的元素均为 1 以外全都为 0，即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

若 $A$ 是 $m \times n$ 阶矩阵，则容易验证 $I_m A = AI_n = A$. 我们把 $I_m A$ 称为用 $m$ 阶单位矩阵 $I_m$ 左乘以 $A$，同理，$AI_n$ 称为 $I_n$ 右乘以 $A$. 上式可以简言之，任何矩阵左乘或右乘一个单位矩阵，其积仍为该矩阵.

# 填空题 6分



设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$, 将AB写作 $\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$ ,

则a= [填空1] , b= [填空2] , c= [填空3] , d= [填空4] , e= [填空5] , f= [填空6]



作答

填空题 3分

设置

已知矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$，其中a,b,c为实数，且$A^3=I$，I为二阶单位矩阵。则a= [填空1] ，b= [填空2]，c= [填空3]

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

# 填空题 4分

设置

设矩阵$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\5 & -4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & 5\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1 & 10\\-1 & 4\end{pmatrix}$，记$AB-C=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$，则a = [填空1] , b = [填空2] , c = [填空3] , d = [填空4] .

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

# 填空题 4分

设置

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$,$C=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$,记$AB-2C=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, 则a = [填空1] , b = [填空2] , c = [填空3] , d = [填空4] .

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

填空题 4分

设置

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, 记$AB-BC=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, 则a = [填空1] , b = [填空2] , c = [填空3] , d = [填空4] .

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，则将 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素按原位置构成的行列式记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det \boldsymbol{A}$，称为 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

**定理 2.2.1** 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶方阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$，即同阶方阵乘积的行列式等于各自行列式的乘积

# 单选题 1分

设置

设A 为3阶方阵，若det(A)=4，则 det(2A)=

A 8

B 12

C 16

D 32

提交

## 2. 矩阵的乘法和线性方程组的关系

采用矩阵的乘法，一般 $n$ 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可以非常简单地表示为矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为线性方程组的系数矩阵，

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

分别表示未知数构成的 $n\times1$ 矩阵与已知常数项构成的 $m\times1$ 矩阵. 这就把一个非常复杂的线性方程组表示成与最简单的数字方程 $ax=b$ 相类似的形式.

# 2.2.4 初等变换和矩阵的秩

对于三元线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=8, & ① \\ \quad 5x_2+2x_3=-4, & ② \\ -2x_1 \quad -3x_3=2 & ③ \end{cases}$

的增广矩阵是 $\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

该方程组的消元解法如下:

先用①式的2倍加到③式上,即可消去③式中的未知数 $x_1$,得到一个同解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=8, & ① \\ \quad 5x_2+2x_3=-4, & ② \\ \quad 4x_2-9x_3=18, & ④ \end{cases}$$

增广矩阵变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & -9 & 18 \end{pmatrix}.$$

再用②式的 $-\frac{4}{5}$ 倍加到④式上，又得同解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=8, & ① \\ \quad\quad 5x_2+2x_3=-4, & ② \\ \quad\quad\quad -\frac{53}{5}x_3=\frac{106}{5}, & ⑤ \end{cases}$$

增广矩阵变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{53}{5} & \frac{106}{5} \end{pmatrix}.$$

再在方程⑤的两边乘以 $-\frac{5}{53}$,又得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8, & ① \\ \quad\quad 5x_2 + 2x_3 = -4, & ② \\ \quad\quad\quad\quad x_3 = -2, & ⑥ \end{cases}$$

增广矩阵变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

然后再将 $x_3 = -2$ 代入②式可得 $x_2 = 0$,最后将 $x_2 = 0, x_3 = -2$ 代入①式即得方程组解 $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -2$.

以上增广矩阵的变化就是矩阵的初等行变换. 除去这些行变换外,还有一种很有用的行变换是交换矩阵的两行,相当于交换两个方程的次序. 综合以上三种变换,我们有以下定义.

**定义** 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行的下列三种变换称为 $\boldsymbol{A}$ 的**初等行变换**:

(1) 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行与第 $j$ 行,记作 $R_i \leftrightarrow R_j$;

(2) 用一个非零实数 $c$ 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行,即用该数乘以该行的每个元素,所得各数按原来次序作为同一行的元素,记作 $R_i \cdot c$;

(3) 用一实数 $c$ 乘以 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j$ 行(如(2)中所述)后,再加到 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行上,记作 $R_i + R_j \cdot c$(称为第 $i$ 行加上第 $j$ 行的 $c$ 倍).

**定义**　矩阵中每一行第一个非零元素(称为该行的非零**首元**)必在上一行非零首元的右下方,称这样的矩阵为**阶梯形矩阵**.

**例 2.2.9**　设

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

其中(1),(2),(4)是阶梯形矩阵;而(3)不是,因为其第 5 行非零首元 3 不在上一行非零首元 $-1$的右下方,而是在 $-1$ 的正下方.

**定理 2.2.2** 任意矩阵 $A$ 均可经有限次初等行变换化为阶梯形矩阵.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换后化成的阶梯形矩阵的非零行数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,记为 $r(\boldsymbol{A})$.

虽然任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换化成的阶梯形矩阵不唯一,但所有化成的阶梯形矩阵都具有相同的非零行数,即 $r(\boldsymbol{A})$ 是被 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定的.

**例 2.2.10** 将下列矩阵化为阶梯形阵：

$$A=\begin{pmatrix}0&3&2&-1&5\\1&-1&0&0&3\\2&7&3&0&6\\0&-2&5&1&0\end{pmatrix}.$$

**解**

$$A\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&3\\0&3&2&-1&5\\2&7&3&0&6\\0&-2&5&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+R_1\times(-2)}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&3\\0&3&2&-1&5\\0&9&3&0&0\\0&-2&5&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_4\times 1}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&3\\0&1&7&0&5\\0&9&3&0&0\\0&-2&5&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4+R_2\times 2]{R_3+R_2\times(-9)}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&3\\0&1&7&0&5\\0&0&-60&0&-45\\0&0&19&1&10\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\times\left(-\frac{1}{15}\right)}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&3\\0&1&7&0&5\\0&0&4&0&3\\0&0&19&1&10\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4+R_3\times(-5)}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&3\\0&1&7&0&5\\0&0&4&0&3\\0&0&-1&1&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&3\\0&1&7&0&5\\0&0&-1&1&-5\\0&0&4&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4+R_3\times 4}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&3\\0&1&7&0&5\\0&0&-1&1&-5\\0&0&0&4&-17\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

$$\boldsymbol{B}\xrightarrow{R_4\times\frac{1}{4}}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&3\\0&1&7&0&5\\0&0&-1&1&-5\\0&0&0&1&-\frac{17}{4}\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和矩阵 $\boldsymbol{C}$ 都是阶梯形矩阵. 显然,同一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化成的阶梯形矩阵不唯一,但阶梯形矩阵的非零行数是唯一的,故 $r(\boldsymbol{A})=4$.

**例 2.2.11** 把矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 4 & 5\\ 1 & 10 & 1 & 2\end{pmatrix}$化为阶梯形,并求 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

**解**

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 4 & 5\\ 1 & 10 & 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -4 & 1 & 1\\ 0 & 8 & -2 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+R_2\cdot 2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

此即 $\boldsymbol{A}$ 的一个阶梯形矩阵,且因其有 2 个非零行(第 1 行与第 2 行),故 $r(\boldsymbol{A})=2$.

# 单选题　1分

设置

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -3\end{pmatrix}$，则 r(A)=

A　1

B　2

C　3

D　4

提交

设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, 则 r(A)=

A 1

B 2

C 3

D 4

提交

# 单选题 1分

设置

矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$的秩为

A 1

B 2

C 3

D 4

提交

## 单选题 1分

设置

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&4&1\\2&1&11&2\\11&4&56&5\\2&-1&5&-6\end{pmatrix}$，则 r(A)=

A 1

B 2

C 3

D 4

提交

# 2.2.5 逆矩阵

**定义** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶方阵,若存在 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n$,则称 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆的**,或说 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆矩阵**,而 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**,记为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

**例 2.2.12** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$,则存在 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$,满足

$$\boldsymbol{AB}_1=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\text{可知 } \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

由逆矩阵定义及例 2.2.12，提出下面 3 个问题：

(1) 在例 2.2.12 中找到的 $\boldsymbol{B}_1$ 矩阵是否唯一？（即是否还有 $\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{B}_1 \neq \boldsymbol{B}_2)$ 使得 $\boldsymbol{AB}_2 = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$）.

(2) 是否所有 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 都存在逆矩阵，即存在 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$？（相对应实数中，是否所有实数 $\boldsymbol{a}$，都有 $\boldsymbol{a}^{-1}$ 存在，使得 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}^{-1} = 1$，结论是否定的，要求 $\boldsymbol{a} \neq 0$）.

(3) 若 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，如何求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

现在来解答上述 3 个问题.

（1）逆矩阵是唯一的.

若 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则由逆矩阵定义

$$\boldsymbol{AB}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n,\quad 且\quad \boldsymbol{AB}_2=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n,$$

故
$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{I}=\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{AB}_2)=(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_2,$$

故　逆矩阵是唯一的.

(2) 由定理 2.2.1 可知:若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶方阵,则

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|.$$

特殊地,若 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶可逆方阵,$\boldsymbol{A}^{-1}$存在,

故
$$|\boldsymbol{AA}^{-1}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{A}^{-1}|,$$

而
$$|\boldsymbol{AA}^{-1}| = |\boldsymbol{I}_n| = 1,$$

因此:(i) $|\boldsymbol{A}| \neq 0$;

(ii) $|\boldsymbol{A}^{-1}| = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|} = |\boldsymbol{A}|^{-1}$.

这是矩阵可逆的一个必要条件,同时也提供了判断给定矩阵是否可逆的有效方法. 事实上,矩阵行列式不为零也是矩阵可逆的充分条件.

**定理 2.2.3** $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是$|\boldsymbol{A}| \neq 0$

推论 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n$,即 $r(\boldsymbol{A}) = n$.

**例 2. 2. 13** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$，由于

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$ **不存在的**

(3) 若 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则用初等变换的方法,求逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶可逆矩阵,构造 $n\times 2n$ 阶矩阵$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n)$,对此矩阵作一系列初等行变换,化为$(\boldsymbol{I}\quad \boldsymbol{B})$,则 $\boldsymbol{B}$ 即为所求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

**例 2.2.14** 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$的逆矩阵.

**解** 构造矩阵$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{I}_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,对其作一系列初等行变换,化为$(\boldsymbol{I},\boldsymbol{B})$,$\boldsymbol{B}$ 即为所求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

$$(A\ I_3)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\2&-1&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+R_1\times(-2)}\begin{pmatrix}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&-3&-8&0&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2\times 3}\begin{pmatrix}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&-2&3&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&1&-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1+R_3\times(-4)]{R_2+R_3\times(-2)}\begin{pmatrix}1&1&0&6&-3&2\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&1&-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+R_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&1&-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

因此 $$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&-2&1\\-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

可以验证 $A^{-1}A=AA^{-1}=I_3$.

逆矩阵的基本性质：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵，则

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

(2) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(4) 设 $k\neq 0$ 实数，则 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$.

单选题 1分

设置

设A, B 为3阶可逆方阵，若det(A)=4， det(B)=2，则det($A^{-1}B$)=

A 1/8

B 1/2

C 1

D 2

提交

# 填空题 4分

设置

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, 记$(A+B)A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, 则a = [填空1] , b = [填空2] , c = [填空3] , d = [填空4] .

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

# 2.2.6 解可逆矩阵方程

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m$ 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵,求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

构造 $m\times(m+n)$ 阶矩阵 $(\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B})$,对此矩阵作一系列初等行变换,化为 $(\boldsymbol{I}\ \ \boldsymbol{X})$,则 $\boldsymbol{X}$ 即为所求 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

**例 2.2.15** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&4&2\\0&3&1\\2&-5&1\end{pmatrix}$,求方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解.

**解**

$$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&0&1&-1&4&2\\3&1&0&0&3&1\\1&0&0&2&-5&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&0&0&2&-5&1\\3&1&0&0&3&1\\1&0&1&-1&4&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3+R_1\times(-1)]{R_2+R_1\times(-3)}\begin{pmatrix}1&0&0&2&-5&1\\0&1&0&-6&18&-2\\0&0&1&-3&9&1\end{pmatrix},\text{故 }\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-5&1\\-6&18&-2\\-3&9&1\end{pmatrix}$$

6. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & -5 & 1\end{pmatrix}$, 求解矩阵方程 $AX=B$

解：构造矩阵(A, B)，做初等行变换

$$(A,\ B)=\begin{pmatrix}1&0&1&-1&4&2\\3&1&0&0&3&1\\1&0&0&2&-5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1&4&2\\0&1&-3&3&-9&-5\\0&0&-1&3&-9&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1&4&2\\0&1&-3&3&-9&-5\\0&0&1&-3&9&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&-5&1\\0&1&0&-6&18&-2\\0&0&1&-3&9&1\end{pmatrix}$$

故 $X=\begin{pmatrix}2&-5&1\\-6&18&-2\\-3&9&1\end{pmatrix}.$

1. 已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，满足 $AX+B=2X$，求矩阵 $X$.

解：由已知得 $(2I-A)X=B$

而 $(2I-A)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，运用初等变换法

$$(2I-A\quad B)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $X$ 满足 $AX=2X+A$，求矩阵 $X$

7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，矩阵 $X$ 满足 $AX=2X+A$，求矩阵 $X$

解 整理方程得 $AX-2X=(A-2I)X=A$，其中

$$A-2I=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\0 & -1 & -1\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$(A-2I\ \ A)=\begin{pmatrix}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\-1&0&-1&-1&0&1\end{pmatrix},$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&-1&1&0\\0&1&1&0&-1&1\\-1&0&-1&-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-1&1&0\\0&1&1&0&-1&1\\0&1&-1&-2&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&-1&1&0\\0&1&1&0&-1&1\\0&0&-2&-2&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-1&1&0\\0&1&1&0&-1&1\\0&0&1&1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{pmatrix},$$

故 $X=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$.