

文科高等数学

1.5 不定积分

1.5.1 原函数与不定积分概念

$$\sin x \xrightarrow{\text{求导}} (\sin x)' = \cos x$$

或

$$\sin x \xrightarrow{\text{微分}} d \sin x = \cos x dx;$$

反过来,

$$\cos x \xrightarrow{\text{求导逆运算}} \sin x$$

或

$$\cos x dx \xrightarrow{\text{微分逆运算}} d \sin x.$$

这个 $\sin x$ 就称为 $\cos x$ 的原函数,意思就是“原来的那个函数”,其导数是 $\cos x$,换句话说,求原函数的问题即下述形式的“填空题”:

$$(\quad)' = \cos x.$$

但你马上会注意到,这里填空的答案却有无穷多个: $\sin x + C$, C 是任意实数. 事实上,

$$(\sin x + C)' = \cos x.$$

定义 设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 若有函数 $F(x)$ 使得

$$F'(x) = f(x), \quad x \in (a, b),$$

则 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 在 (a, b) 内的一个原函数.

关于给定函数 $f(x)$ 的原函数, 需要解决三个问题:

- (1) $f(x)$ 在什么条件下有原函数, 即存在性问题;
- (2) 如果 $f(x)$ 有原函数, 有多少个, 即唯一性问题;
- (3) 如何求出 $f(x)$ 的全部原函数.

其中第一个问题留在下一节解决; 对于第二个问题, 因为若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x) + C$ 都是 $f(x)$ 的原函数, C 可以是任意实常数, 因此原函数有无穷多个 (只要有的话); 第三个问题, 设 $F(x), G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数, 即 $F'(x) = f(x), G'(x) = f(x)$, 则 $(F(x) - G(x))' = 0, F(x) - G(x) \equiv C, F(x) = G(x) + C$, 显然 $f(x)$ 的原函数之间至多相差一个常数, 要求 $f(x)$ 的全部原函数只需求出一个原函数 $F(x)$, 则 $F(x) + C$ 即为全部原函数.

定义 若 $f(x)$ 有原函数, 则它的全部原函数 $\{F(x) \mid F'(x) = f(x)\}$ 称为 $f(x)$ 的不定积分, 记作

$$\int f(x) dx = \{F(x) \mid F'(x) = f(x)\},$$

其中, $\int$ 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, x 称为积分变量, $f(x) dx$ 称为被积表达式.

我们常用 $\int f(x) dx = F(x) + C$, C 是任意实常数, 来代替 $\{F(x) \mid F'(x) = f(x)\}$, 且称 C 为积分常数. 求给定函数的不定积分的运算称为积分法(简称积分).

例 1.5.1 $\int \cos x dx = \sin x + C.$

注 “ C 是任意实常数”这句话常省略, 并且在一些数学手册或计算机的高级语言中, 连 C 都不写, 但读者今后做不定积分的题时, 千万不要忘记写这个常数 C .



例 1.5.2 $\int \sin x \, dx = ?$

解 因 $(\cos x)' = -\sin x \Leftrightarrow (-\cos x)' = \sin x$, 故 $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.

由不定积分的定义可知 $\int f(x) \, dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$. 因此, 要验证一个不定积分 $\int f(x) \, dx = F(x) + C$ 是否正确, 只要计算导数, 看 $F'(x) = f(x)$ 是否成立.

例 1.5.3 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$. 这是因为 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

但 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 因而我们又有

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C.$$

此例表明,不定积分的答案形式往往不止一个. 其实,原因就在于那个常数 C . 此例中,由于 $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ 是个常数, $\arcsin x + C$ 与 $-\arccos x + C_1$ 事实上都是原函数,其中 $C_1 = C + \pi/2$.

设 $\int f(x) dx = x^2 + c$, 则 $\int \frac{f(x^2)}{x} dx =$

A

$$x^1 + c$$

B

$$x^2 + c$$

C

$$x^3 + c$$

D

$$x^4 + c$$

提交

设 $f(x)$ 连续, $F'(x) = f(x)$, 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x)$ 必为奇函数。这种说法:

☐ A 正确

☒ B 错误

提交

设 $f(x)$ 连续, $F'(x) = f(x)$, 若 $f(x)$ 为单调增函数, 则 $F(x)$ 必为单调增函数。这种说法:

- ☐ A 正确
- ☒ B 错误

1.5.2 基本积分公式表

根据基本初等函数的微分公式与不定积分的定义,我们可得到下面的基本积分公式表:

$$(1) \int 0 dx = C;$$

$$(2) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$(3) \int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + C \quad (m \neq -1, x > 0);$$

$$(4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$(5) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(7) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(8) \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$(9) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$(10) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$(11) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$$

$$(12) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$(13) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

注 (1) $\int \frac{1}{x} dx$ 不是 $\int x^m dx$ 在 $m = -1$ 的特例.

(2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, $\ln$ 后面真数 x 要加绝对值, 原因是 $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$. 事

实上, 对 $x > 0$, $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$; 若 $x < 0$, 则

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}.$$

(3) 要特别注意 $\int x^m dx$ 与 $\int a^x dx$ 的区别: 前者是幂函数的积分, 后者是指数函数的积分.

1.5.3 不定积分的线性运算

$$(1) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx ;$$

$$(2) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx , k \text{ 是非零常数}.$$

例 1.5.4 求 $\int (1 + \sqrt{x})^3 dx$.

解 原式 $= \int (1 + 3\sqrt{x} + 3x + \sqrt{x^3}) dx$

$$= \int dx + 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 3 \int x dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx$$
$$= x + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 3 \cdot \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$$
$$= x + 2x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C.$$

注 (1) $\int dx$ 与 $\int 1dx$ 是相同的, 其中 1 可省略.

(2) 此例中化为 4 个积分, 应出现 4 个任意积分常数, 它们的任意性使其可合并成一个任意常数 C , 因此在最后写出一个 C 即可.

例 1.5.5 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$.

解 原式 $= \int \left(\frac{x^4 - 1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + x^2} \right) dx$

$$= \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1 + x^2} \right) dx = \int x^2 dx - \int dx + \int \frac{dx}{1 + x^2}$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.$$

例 1.5.6 求 $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

解 原式 $= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$.

$$= \int \csc^2 x dx - \int \sec^2 x dx = -\cot x - \tan x + C.$$

例 1.5.7 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

解 原式 $= \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C$.

1.5.4 换元法

1. 不定积分的第一换元法——凑微分

先看一个例子：

例 1.5.8 求 $\int \frac{x dx}{1+x^2}$.

解 因 $(1+x^2)' = 2x$, 与被积函数的分子只差常数倍数 2, 如果将分子补成 $2x$, 即可将原式变形:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \quad (\text{令 } u = 1+x^2) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C. \quad (\text{代回 } u = 1+x^2)\end{aligned}$$

例 1.5.9 求 $\int (ax + b)^m dx, (m \neq -1, a \neq 0).$

解 原式 $= \frac{1}{a} \int (ax + b)^m d(ax + b)$ (凑微分 $d(ax + b)$)

$$= \frac{1}{a} \int u^m du \quad (\text{换元 } u = ax + b)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C \quad (\text{积分})$$

$$= \frac{1}{a(m+1)} (ax + b)^{m+1} + C. \quad (\text{代回 } u = ax + b)$$

例 1.5.10 求 $\int x^2 e^{-x^3} dx$.

解 原式 $= -\frac{1}{3} \int e^{-x^3} d(-x^3)$ (凑微分 $d(-x^3) = -3x^2 dx$)

$$= -\frac{1}{3} \int e^u du = -\frac{1}{3} e^u + C = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C. \quad (\text{换元 } u = -x^3)$$

注 在熟练掌握凑微分法之后,中间换元 $u = \varphi(x)$ 可省略不写,显得计算过程更简练,但要做到心中有数.

$$\int \sqrt{2x+1} dx =$$

A

$$\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$$

B

$$\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

C

$$\frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

D

$$\frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

提交

$$\int \frac{x^2}{1+x} dx =$$

A

$$\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|1+x| + c$$

B

$$x^2 - x + \ln|1+x| + c$$

C

$$\frac{1}{2}x^2 + x + \ln|1+x| + c$$

D

$$x^2 - x \ln|1+x| + c$$

提交

求不定积分 $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$

求不定积分 $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$.

解:
$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}} d \ln x$$

做变换 $u = \ln x$,

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}} d \ln x &= \int \frac{u}{\sqrt{1+u}} du \\ &= \int \frac{u+1}{\sqrt{u+1}} d(u+1) - \int \frac{1}{\sqrt{u+1}} d(u+1) \\ &= \frac{2}{3}(u+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{u+1} + C \\ &= \frac{2}{3}(\ln x + 1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{\ln x + 1} + C. \end{aligned}$$

2. 不定积分的第二换元法

凑微分法是不定积分换元法的第一种形式,另一种是下面的第二换元法.

第一换元法公式的核心是 $\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f(u) du$. 从公式的左边演算到右边,就是凑微分换元: $u = \varphi(x)$. 如果我们从公式的右边演算到左边,就成为换元的另一种形式,称为第二换元法.

第二换元法常用于被积函数含有根式的情况.

例 1.5.17 求 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

解 令 $\sqrt{x} = t \Leftrightarrow x = t^2$ (此处 $\varphi(t) = t^2$). 于是

$$\text{原式} = \int \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt$$

$$= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$= 2 \int dt - 2 \int \frac{d(1+t)}{1+t}$$

$$= 2t - 2 \ln|1+t| + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

$$(\text{代回 } t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x})$$

注 上面的换元 $\sqrt{x} = t$ 的目的在于将被积函数中的无理式转换成有理式, 然后积分.

第二换元法除处理形似上例这种根式 $\sqrt{x}$ 以外,还常处理含有根式 $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ ($a > 0$)的被积函数的积分.

被积函数含根式	换元方法	运用的三角公式
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	$\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a \tan t$	$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	$1 - \sin^2 t = \cos^2 t$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$$

例 1.5.18 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \ (a > 0)$.

解 令 $x = a \sec t$, 则 $dx = a \sec t \tan t \, dt$, 于是

$$\text{原式} = \int \frac{a \sec t \tan t \, dt}{a \tan t} = \int \sec t \, dt = \ln |\sec t + \tan t| + C_1.$$

到此需将 t 代回原积分变量 x , 用到反函数 $t = \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}$, 但这种做法较繁. 下

面介绍一种直观的便于实施的图解法(图 1.49):

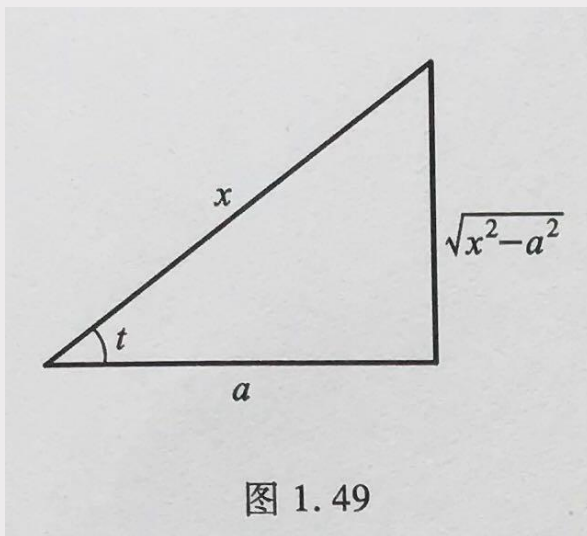


图 1.49

作直角三角形, 其一锐角为 t 及三边 $a, x, \sqrt{x^2 - a^2}$ 满足: $\sec t = \frac{x}{a}$. 由此,

$$\text{原式} = \ln |\sec t + \tan t| + C_1$$

$$= \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C_1 = \ln \frac{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|}{a} + C_1$$

$$= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + (C_1 - \ln a) \stackrel{C = C_1 - \ln a}{=} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

注 C_1 是任意常数, $-\ln a$ 是常数, 由此 $C = C_1 - \ln a$ 仍是任意常数.

例 1.5.19 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \ (a > 0)$.

解 令 $x = a \tan t$, 则 $dx = a \sec^2 t \, dt$, 于是

$$\text{原式} = \int \frac{a \sec^2 t \, dt}{a \sec t} = \int \sec t \, dt = \ln |\sec t + \tan t| + C_1.$$

图解(图 1.50)换元得:

$$\text{原式} = \ln |\sec t + \tan t| + C_1$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + C_1 = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C_1 - \ln a$$

$$\underline{\underline{C = C_1 - \ln a}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C.$$

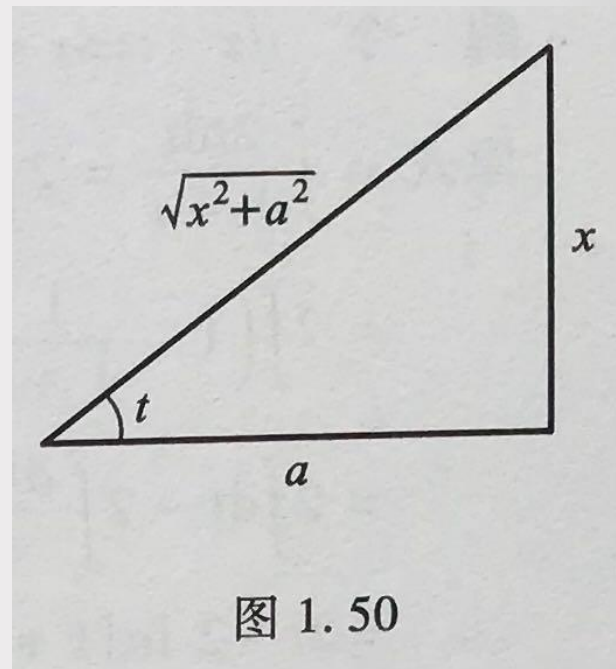


图 1.50

1.5.5 分部积分法

从微分公式 $d(uv) = vdu + u dv$ 两边积分, 即 $\int d(uv) = \int vdu + \int u dv$. 由此导出不定积分的分部积分公式: $\int u dv = uv - \int vdu$ 或 $\int uv' dx = uv - \int u' v dx$.

下面通过例子说明公式的用法.

例 1.5.21 求 $\int x^2 \ln x dx$.

解 $\int x^2 \ln x dx \xrightarrow{\text{凑微分}} \int \ln x d\left(\frac{1}{3}x^3\right)$

$$\xrightarrow{\text{用公式: } u = \ln x, v = \frac{1}{3}x^3} \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 d \ln x$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \quad (\text{将微分 } d \ln x \text{ 算出})$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

例 1.5.22 求 $\int x^2 \sin x \, dx$.

解 原式 = $\int x^2 d(-\cos x)$ (凑微分)

= $-x^2 \cos x - \int (-\cos x) d(x^2)$ (用分部积分公式)

= $-x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$

= $-x^2 \cos x + 2 \int x \, d \sin x$ (第二次凑微分)

= $-x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x \, dx \right]$ (第二次用分部积分公式)

= $-x^2 \cos x + 2 x \sin x + 2 \cos x + C.$

例 1.5.23 求 $\int e^x \sin x \, dx$.

解 $\int e^x \sin x \, dx = \int \sin x \, d e^x$ (凑微分)

$$= e^x \sin x - \int e^x d \sin x$$
 (用分部积分公式)

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$
 (算出微分)

$$= e^x \sin x - \int \cos x \, d e^x$$
 (第二次凑微分)

$$= e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int e^x d \cos x \right]$$
 (第二次用分部积分公式)

$$= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx.$$
 (第二次算出微分)

由此得:

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) + C_1,$$

$$\text{因此 } \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$$

例 1.5.24 求 $\int \arctan x dx$.

解 此题被积函数可看作 $x^0 \arctan x$, $x^0 dx = dx$, 即适合分部积分公式中 $u = \arctan x$. $v = x$, 故

$$\text{原式} = x \arctan x - \int x d \arctan x \quad (\text{用分部积分公式})$$

$$= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \quad (\text{算出微分})$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \quad (\text{凑微分})$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

小结:

(1) 分部积分公式常用于被积函数是两种不同类型初等函数之积的情形, 例如

$$x^3 \arctan x, x^3 \ln x$$

幂函数与反正切或对数函数

$$x^2 \sin x, x^2 \cos x$$

幂函数与正弦, 余弦

$$x^2 e^x$$

幂函数与指数函数

$$e^x \sin x, e^x \cos x$$

指数函数与正弦, 余弦

(2) 在用分部积分法计算时, 将哪类函数凑成微分 dv , 一般应选择容易凑的那个. 例如

被积函数

凑微分 dv

$$x^3 \arctan x, x^3 \ln x$$

$$\arctan x \, d\left(\frac{1}{4}x^4\right), \ln x \, d\left(\frac{1}{4}x^4\right)$$

$$x^2 \sin x, x^2 \cos x, x^2 e^x$$

$$x^2 d(-\cos x), x^2 d \sin x, x^2 d e^x$$

$$e^x \sin x, e^x \cos x$$

$$\sin x \, d e^x, \cos x \, d e^x$$

下面列出本节已得到的基本积分公式.

$$(1) \int 0 \, dx = C;$$

$$(2) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$(3) \int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + C \quad (m \neq -1, x > 0);$$

$$(4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$(5) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(7) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(8) \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$(9) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$(10) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$(11) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$$

$$(12) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$(13) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C;$$

$$(14) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C;$$

$$(15) \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C;$$

$$(16) \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a > 0);$$

$$(17) \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a > 0);$$

$$(18) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$$

$$(19) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0);$$

$$(20) \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C;$$

$$(21) \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

$$\int 5^x e^x dx =$$

A

$$5^x e^x + c$$

B

$$\frac{1}{\ln 5} 5^x e^x + c$$

C

$$\frac{5^x e^x}{1 + \ln 5} + c$$

D

$$(1 + \ln 5) 5^x e^x + c$$

提交

设 $f(x)$ 的一个原函数是 $(\ln x)^2$, $(x > 0)$, 则 $\int x f'(x) dx =$

- ☐ A $2 \ln(x) + C$
- ☐ B $\frac{2 \ln x}{x}$
- ☐ C $(\ln x)^2 + C$
- ☒ D $2 \ln(x) - (\ln x)^2 + C$

提交

$$(1) \int \ln(1+x^2) dx$$

$$(1) \int \ln(1+x^2) dx$$

$$= x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = x \ln(1+x^2) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C ;$$

设 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$, 求 $\int x f'(x) dx$

设 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$, 求 $\int x f'(x) dx$

解: $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

$$\int x f'(x) dx = x f(x) - \int f(x) dx = \cos x - \frac{2}{x} \sin x + C$$



你不定积分没加C