# 文科高等数学

## 1.4 导数的应用

# 1.4.1 函数的单调性

我们在"1.1 函数"中已定义了函数的单调性．现在从图像来观察：在图1.34中，函数$f(x)$单调增加：$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$，记作↗；在图1.35中，函数$f(x)$单调减少：$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$，记作↘.

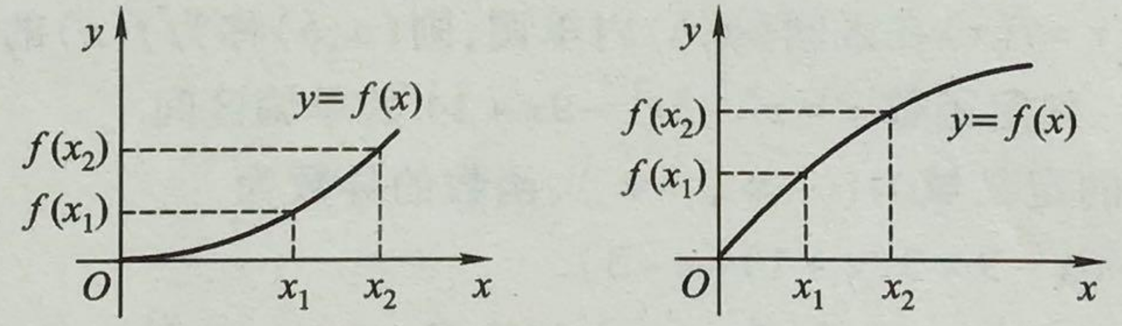


图 1.34

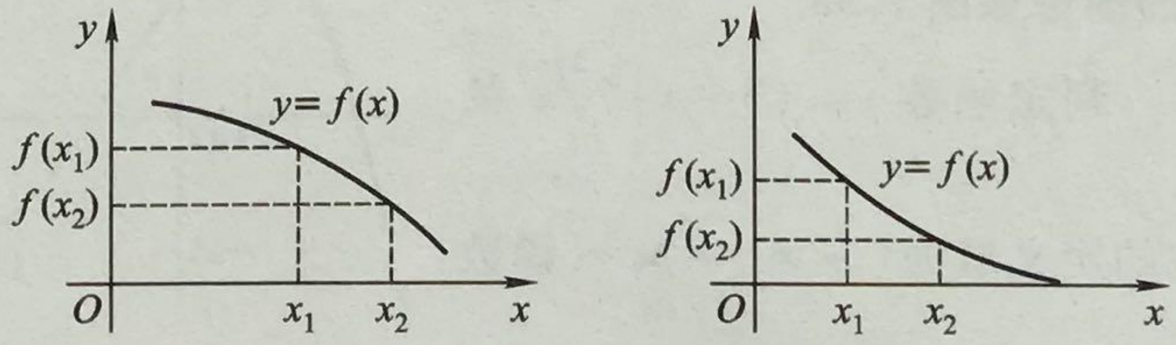


图 1.35

**定理 1.4.1** 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 $(a,b)$ 内可导.

(1) 若在 $(a,b)$ 内 $f'(x)>0$,则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;

(2) 若在 $(a,b)$ 内 $f'(x)<0$,则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内单调,则 $(a,b)$ 称为 $f(x)$ 的**单调区间**.

**例 1.4.1** 判定函数 $y=x^3-3x^2-9x+14$ 的单调区间

**解** 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，函数的导数为

$$y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3).$$

函数 $y$ 在 $(-\infty,-1]$ 及 $[3,+\infty)$ 上单调增加；在 $[-1,3]$ 上单调减少. 函数 $y=x^3-3x^2-9x+14$ 的图像如图 1.38.

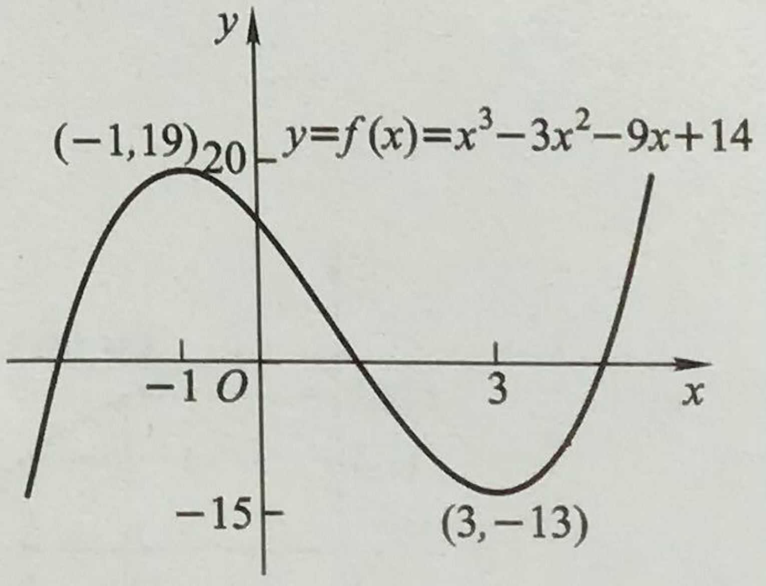


图 1.38

**例 1.4.2** 判定函数 $y=(3-x)^3\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

**解** 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，函数的导数为

$$y'=-3(x-3)^2\sqrt[3]{x^2}-(x-3)^3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=-\frac{11}{3}\cdot\frac{(x-3)^2\left(x-\dfrac{6}{11}\right)}{\sqrt[3]{x}},$$

列出下表：

| $x$ | $(-\infty,0)$ | $0$ | $(0,6/11)$ | $6/11$ | $(6/11,3)$ | $3$ | $(3,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $\infty$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $9.87$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ |

函数在 $(-\infty,0]$，$[6/11,+\infty)$ 上单调减少；在 $[0,6/11]$ 上单调增加.

**注**　$y'(0)=\infty$，表明函数在(0,0)处的切线垂直于 $x$ 轴.

函数 $y=(3-x)^3\sqrt[3]{x^2}$ 的图像如图 1.39 所示. 注意在(0,0)处曲线的切线与 $y$ 轴重合.

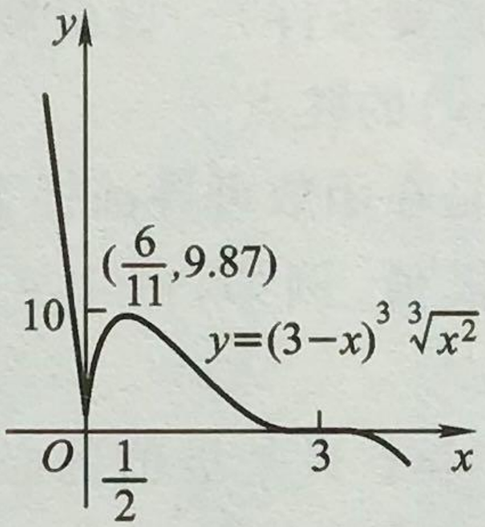


图 1.39

# 1.4.2 函数达到极值的条件

图 1. 40 中的函数 $y=f(x)$，在 $[x_1,x_2]$，$[x_3,x_4]$ 上单调增加，在 $[x_2,x_3]$，$[x_4,x_5]$ 上单调减少.

函数在 $x_2,x_4$ 处从单调增加转成单调减少，函数值 $f(x_2)$，$f(x_4)$ 比邻近的函数值都大，这种函数值称为极大值；类似地，$f(x_3)$ 称为极小值. 但要注意，$f(x_1)$ 也是极小值，却比极大值 $f(x_4)$ 还要大. 这表明极小值不是最小值.

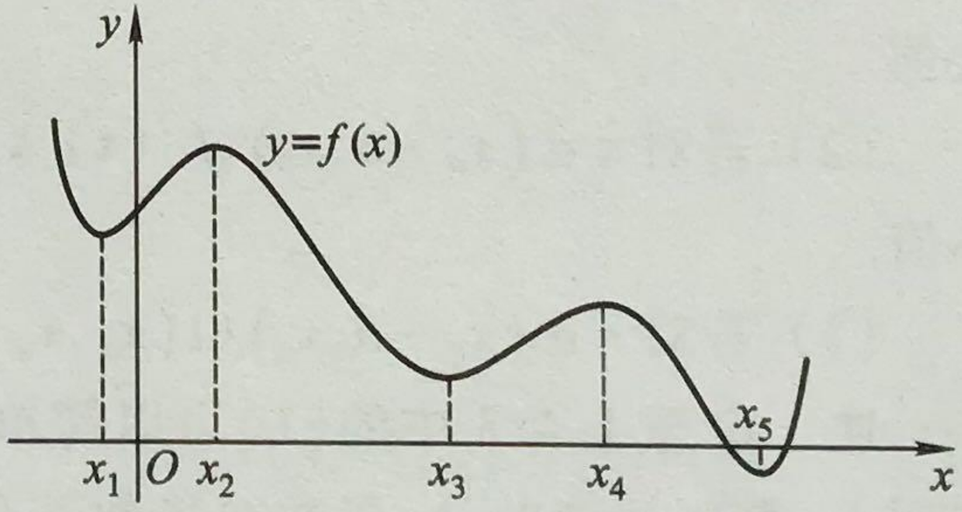


图 1.40

**定义**　设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的某个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有定义，若对任意 $x \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$，

(1) 有 $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**极大值**，$x_0$ 为**极大值点**；

(2) 有 $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的**极小值**，$x_0$ 为**极小值点**.

极大值与极小值统称为**极值**，极大值点与极小值点统称为**极值点**.

例如，例 1.4.1 中 $y(-1)=19$ 是极大值，$y(3)=-13$ 是极小值，例 1.4.2 中 $y(0)=0$ 是极小值，$y\left(\frac{6}{11}\right)\approx 9.87$ 是极大值.

从前面的图可以看到函数的极值是在单调变化的转折点处达到. 用导数来判断的话,在导数改变符号的地方达到极值,即对于可导函数来说,某点导数为0,且左、右点导数改变符号,则在这点达到极值.

**定义** 若 $f'(x_0)=0$,则 $x_0$ 称为函数 $f(x)$ 的**驻点**.

**定理 1.4.2**(极值存在的必要条件) 设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 可导,且 $f(x_0)$ 是极值,则 $f'(x_0)=0$,即 $x_0$ 是 $f(x)$ 的驻点.

**注** (1) 所谓必要条件,是在函数可导前提下极值存在的必要条件. 对于不可导的点 $x_0$,$f(x_0)$ 也可能是极值. 例如,例 1.4.2 中的 $y(0)=0$ 是极小值,但 $y'(0)$ 不存在.

(2) 对可导的点 $x_0$,$f'(x)=0$ 只是极值的必要条件,但不充分. 例如 $y=x^3$ 在 $x=0$ 处导数为 0,但 $y(0)$ 显然不是极值.

极值存在的必要条件告诉我们，要求解给定函数的极值点，只要在驻点及不可导点中寻找，对于不是驻点的可导点一定不是极值点，如何能进一步判定驻点及不可导点中哪些是极值点？哪些不是极值点？下面给出函数达到极值的充分条件.

**2. 函数达到极值的第一充分条件**

**定理 1.4.3**（极值存在的第一充分条件） 设函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的某邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内连续，且对 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，$f'(x)$ 存在.

（1）若对 $x\in(x_0-\delta,x_0)$，$f'(x)>0$；$x\in(x_0,x_0+\delta)$，$f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 是极大值.

（2）若对 $x\in(x_0-\delta,x_0)$，$f'(x)<0$；$x\in(x_0,x_0+\delta)$，$f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 是极小值.

（3）若对 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，$f'(x)$ 不变号，则 $f(x_0)$ 不是极值.

**注** 定理 1.4.3 中的(1)可以简单地说成导数从正变到负，(2)是导数从负变到正. 需要注意的是，函数在导数不存在的点处也可能达到极值.

**例 1.4.3** 求函数 $y=\frac{1}{3}x^3-3x-\ln x^2$ 的极值.

**解** 函数的定义域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

导数：$y'=x^2-3-\frac{2}{x}=\frac{x^3-3x-2}{x}=\frac{(x-2)(x+1)^2}{x}$.

令 $y'=0$ 得驻点：$-1,2$.

没有导数不存在点.

上述点把定义域分成若干区间，列表如下：

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $(0,2)$ | $2$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | + | − | 0 | + |
| $y$ | ↗ | 8/3 | ↗ | ↘ | 极小，$y(2)$ | ↗ |

其中 $y(2)=-\frac{10}{3}-2\ln 2$ 是极小值，$y(-1)=\frac{8}{3}$ 不是极值.

**3. 函数达到极值的第二充分条件**

如果驻点处有二阶导数，则还可用第二充分条件来判断函数的极值.

在图 1.41 中，在 $x_0$ 的邻域内，$f'(x)$ 从 + 经过 0 变到 -，即 $f'(x)$ 单调减少，从而 $f'(x)$ 的导数应为负，于是 $f''(x)$ 为负.

在图 1.42 中，在 $x_0$ 的邻域内，$f'(x)$ 从 - 经过 0 变到 +，即 $f'(x)$ 单调增加，从而 $f'(x)$ 的导数应为正，于是 $f''(x)$ 为正.

**定理 1.4.4**（极值存在的第二充分条件） 设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 具有二阶导数 $f''(x_0)$，且 $f'(x_0)=0$.

(1) 若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 是极大值；(2) 若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 是极小值.

**例 1.4.4** 求函数 $f(x)=x^3-9x^2+15x+3$ 的极值.

**解** 因 $f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$，有驻点：$x_1=1$，$x_2=5$. 又因 $f''(x)=6x-18=6(x-3)$，$f''(1)<0$，$f''(5)>0$，故 $f(1)=10$ 是极大值，$f(5)=-22$是极小值.

下面把求函数 $f(x)$ 极值的步骤作简要归纳：

(0) 计算函数f(x)的定义域

(1) 计算导数 $f'(x)$，并尽可能将 $f'(x)$ 分解成因式之积；

(2) 令 $f'(x)=0$，解出此方程的根，即为驻点；

(3) 列出不可导的点；

(4) 用驻点及不可导的点将 $f(x)$ 的定义域分成顺序的若干区间，确定各区间内导数的符号；

(5) 列表，标明各区间内函数的单调性；

(6) 单调性改变的点即为极值点，分别确定极大值与极小值.

$(3_1)$ 计算二阶导数 $f''(x)$；

$(4_1)$ 确定各驻点处 $f''(x)$ 的符号，并根据第二充分条件判定是何种极值.

以上步骤在实施时要视具体函数的情况进行选择. 一般的，若二阶导数易于计算时，可采用(1)，(2)，$(3_1)$，$(4_1)$；若二阶导数不易计算时，可采用(1) ~ (6).

求函数$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$的单调区间，极值点及极值

1．求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x-2$ 的单调区间、极值点及极值.

解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

由 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)$,

可知 $f(x)$ 有两个驻点 $x_1=3$，$x_2=-1$，且无不可导点。

列表如下

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,3)$ | $3$ | $(3,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | — | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ | 极小值 | ↗ |

综上可知：$f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-1)$ 与 $(3,+\infty)$，单调减区间为 $(-1,3)$。

$x=-1$ 为极大值点，极大值为 $f(-1)=3$,

$x=3$ 为极小值点，极小值为 $f(3)=-29$.

求函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的单调区间和极值.

解：　　函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x\in R\mid x\neq 0\}$，且

$$y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2},$$

驻点为 $x=1$，　$x=-1$.

故当 $x>1$ 或 $x<-1$ 时，$y'>0$，$f(x)$ 单增，

−1< x < 0 以及 0 < x < 1

当时~~$-1<x<1$时~~，$y'<0$，$f(x)$ 单减，

当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取极大值，极大值为 $f(-1)=-2$，，

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取极小值，极小值为 $f(1)=2$.，

试问函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$ 在$(-1, 1)$内是否存在极值？为什么？

试问函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$ 在 $(-1,\ 1)$ 内是否存在极值？为什么？

在 $(-1,\ 1)$ 内存在极值，在 $x=0$ 处存在极大值 2.

当 $x<0$ 时，函数是单减的，在 $x=0$ 的附近（$x<0$），函数值与 1 接近，

当 $x>0$ 时，函数是单增的，在 $x=0$ 的附近（$x>0$），函数值与-1 接近，

但 $f(0)=2$，由极值定义可知，$f(x)$在 $(-1,\ 1)$ 内存在极值，在 $x=0$ 处存在极大值 2.


我们最喜欢的是什么？
数学！
数学！
数学！

# 1.4.3 函数的最值

**定义** 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，$x_0\in[a,b]$. 若对任意 $x\in[a,b]$，$f(x_0)\geqslant f(x)$，则 $f(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**最大值**；若对任意 $x\in[a,b]$，$f(x_0)\leqslant f(x)$，则 $f(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**最小值**. 最大值与最小值统称为**最值**.

由定义知，区间内的最值一定是极值，但反之却不一定. 如图 1.43 中 $f(x_1)$ 与 $f(x_3)$ 是极小值，$f(x_2)$ 与 $f(x_4)$ 是极大值. 显然 $f(x_2)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，而 $f(b)$ 则是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值. 我们可看到：函数的最大值或最小值都是唯一的，它可能在若干特殊的点（例如驻点，不可导点及区间的端点）处达到. 因此我们

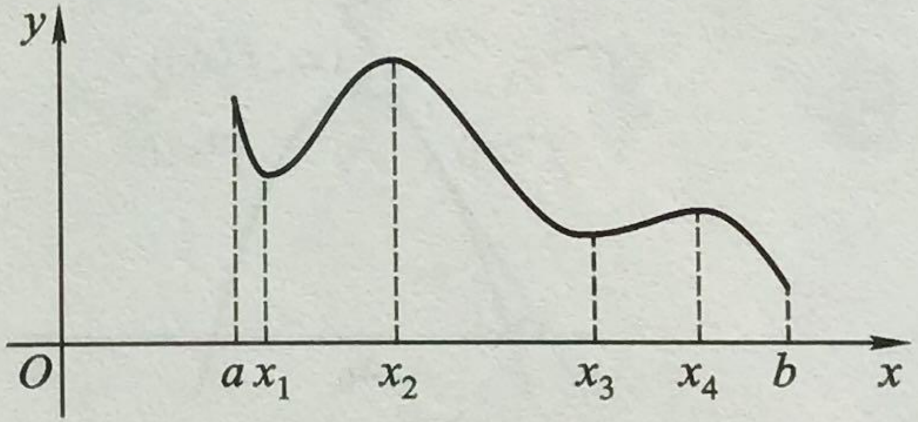

图 1.43

可按下述步骤求给定闭区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最值：

可按下述步骤求给定闭区间$[a,b]$上连续函数$f(x)$的最值:

(1) 计算导数$f'(x)$,并尽可能将$f'(x)$分解成因式之积;

(2) 令$f'(x)=0$,解出$(a,b)$内此方程的根,即为驻点;

(3) 列出$(a,b)$内的不可导点;

(4) 计算$(a,b)$内驻点,不可导点及区间端点$a,b$处的函数值;

(5) 从上述有限个函数值中选出最大与最小的,即为所要求的最值.

**例 1.4.5** 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{2x-x^2}$ 在 $[-1,4]$ 上的最值.

**解** 导数：$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2-2x}{\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1-x}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{(2-x)^2}}$；

驻点：$x_1=1\in(-1,4)$；

$(-1,4)$ 内不可导点：$x_2=0,x_3=2$；

区间端点：$x_4=-1,x_5=4$.

以上各点的函数值：$f(1)=1,f(0)=f(2)=0,f(-1)=-\sqrt[3]{3},f(4)=-2$. 故 $f(4)=-2$ 是最小值，$f(1)=1$ 是最大值.

# 单选题 1分

设置

函数$f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$在区间$[1,e^3]$上的最大值为

A 0

B 1/e

C $\frac{4}{e^2}$

D $\frac{9}{e^3}$

提交

# 单选题 1分

设置

函数$y=\sqrt{x}\ln x$在区间$[e^{-3},3]$上的最小值为

A $-2/e$

B $0$

C $-3e^{-\frac{3}{2}}$

D $\sqrt{3}\ln 3$

提交

# 1.4.4 未定式求法


洛必达的微笑

**定理 1.4.5**(洛必达法则)　设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在点 $a$ 的某个空心邻域 $(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$ 内有定义. 如果

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$;

(2) $f(x)$,$g(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$ 内可导, 且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$($K$ 可以是 $\infty$),

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$.

**定理 1.4.6**(洛必达法则)　设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在点 $a$ 的某个邻域内有定义. 如果

(1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$;

(2) $f(x)$,$g(x)$ 在点 $a$ 的空心邻域内可导,且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K$($K$ 可以是$\infty$),

则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K.$

如果把定理 1.4.5 与 1.4.6 中的"$x\to a$"都改成"$x\to a^-$"或"$x\to a^+$",结论仍然成立. 此外,如果把两个定理中的"$a$"改成"$-\infty$"或"$+\infty$",那么结论也成立. 于是,在满足定理的这些条件下,就有公式

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**例 1.4.7** 求极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{\ln(e - x) + x - 1}$.

**解** 易见此式符合洛必达法则的条件，运用洛必达法则得：

$$原式 = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{x} - e^{-x})'}{(\ln(e - x) + x - 1)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} + e^{-x}}{\dfrac{-1}{e - x} + 1} = \frac{2}{-\dfrac{1}{e} + 1} = \frac{2e}{e - 1}.$$

**例 1.4.8** 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\arctan x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

**解** 由洛必达法则，

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{2}{1+x^2}}{-e^{\frac{3}{x}}\cdot\dfrac{3}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{3(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}}\overset{①}{=\!=}\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{3}{x}}}=\frac{2}{3}.$$

或 $$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arctan x}{\dfrac{3}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{2}{1+x^2}}{-\dfrac{3}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{3(1+x^2)}=\frac{2}{3}$$

**例 1.4.9** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\cot x}{\ln x}$.

**解** 由洛必达法则，

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\cot x}\cdot(-\csc^2 x)}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\cos x\cdot\sin x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}=-1.$$

## 单选题 1分

设置

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{5+x}-3}{\sqrt{x}-2} =$$

A 0

B 1

C 3/2

D 2/3

提交

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\sin 4x}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{\sin 4x}.$$

$$原式=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\tan x\sec^2 x}{4\cos 4x}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}}{2\cos\pi}=-1$$

**例 1.4.10** 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{x}}{x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}$.

**解** 由洛必达法则,

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}}{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}$$

$$\overset{②}{=\!=\!=}4\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{4+x}=4\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=+\infty.$$

**注** 上面求极限过程中,多次运用了洛必达法则.

**注** 上面求极限过程中,多次运用了洛必达法则.

用来求未定式$\frac{0}{0}$与$\frac{\infty}{\infty}$的上述两个定理统称为**洛必达法则**,它的应用广泛性与优越性显而易见.但在应用此法则时还需特别注意以下三点:

(1)应用公式之前应先判定是否为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$未定式.对于非$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$,绝对不能使用此法则.

(2)在$\lim\limits_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在的情况下,不能说$\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}$也不存在,此时应选择其他方法计算.例如下例对$\frac{0}{0}$型未定式的极限计算:

**例 1.4.11** 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

**解** 若使用洛必达法则,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}=-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

极限不存在,但是

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}\overset{③}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0.$$

(3) 每次使用法则前,要尽量简化式子(可通过无穷小量等价性质如例 1.4.11中的③或其他途径如例 1.4.10 中的②),特别是要把极限的已知部分分离出来如例 1.4.8 中的①.

凡是$0\cdot\infty$型与$\infty-\infty$型未定式均需变形成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型后再利用洛必达法则计算.

**例 1.4.12** 求极限$\lim\limits_{x\to0^+}x^k\ln x\quad(k>0)$.　　　($0\cdot\infty$型)

**解** 原式$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-k}}$　　　$\left(\text{转换成}\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{k}{x^{k+1}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^k}{-k}=0.\qquad\text{（洛必达法则）}$$

此例为什么不用$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^k}{\dfrac{1}{\ln x}}$进行计算，请你试一试.

所谓$\infty-\infty$型未定式，有两种类型：$(+\infty)-(+\infty)$与$(-\infty)-(-\infty)$. 如果是$(+\infty)-(-\infty)$与$(-\infty)-(+\infty)$，那么就不是未定式. 事实上，$(+\infty)-(-\infty)=+\infty$，$(-\infty)-(+\infty)=(-\infty)$.

**例 1.4.13** 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

$$\left(\lim_{x\to 0^+}\text{是}(+\infty)-(+\infty)\text{型},\ \lim_{x\to 0^-}\text{是}(-\infty)-(-\infty)\text{型}\right)$$

**解** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$　　$\left(\text{转换成}\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\cdot x}\qquad (e^x-1\sim x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}.\qquad (\text{洛必达法则})$$

**例 1.4.14** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$ （$(+\infty)-(+\infty)$型）

**解** 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$ $\left(\text{转换成}\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^4} \quad (\sin x \sim x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x - 2x\cos^2 x + 2x^2\cos x\sin x}{4x^3} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x + x^2\sin x}{2x^3}\cdot\cos x$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x + x^2\sin x}{2x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x \quad \left(\text{分离出}\lim_{x\to 0}\cos x = 1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x + 2x\sin x + x^2\cos x}{6x^2} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3x\sin x}{x^2}+\cos x}{6} \quad (\sin x \sim x)$$

$$=\frac{2}{3}$$

1．计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{\sin^4 x}$．

1．计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{\sin^4 x}$．

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}-2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left( \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{\sin x}{2}\right)=0$$


神
就是搞
洛必达
洛神
当你无法求导时，你可以故意抄错题目，继续洛。