# “文科高等数学”读书报告信息表

| | | | |
|---|---|---|---|
| 学　　号 1 | | 姓　　名 1 | |
| 学　　号 2 | | 姓　　名 2 | |
| 学　　号 3 | | 姓　　名 3 | |
| 题　　目 | | | |
| 1、题目确定的依据和想法（楷体小四号，不超过 100 字） | | | |
| 2. 读书报告作者贡献（楷体小四号，不超过 100 字） | | | |
| 3、其他说明（楷体小四号，不超过 50 字） | | | |

# 2. 文科数学读书报告要求

**一、内容：**

挖掘和研究数学在生活中的应用或者自己感兴趣的与课程相关的内容，完成一篇读书报告。

**二、完成形式：**

（1）独立完成读书报告

（2）分组完成读书报告：同一个班级内的同学们可自由组合**（每组最多三人，三人相关信息在表中填写，可以不同学院组合）**，以小组的形式完成读书报告。每个小组必须详细写明每人在完成读书报告中所做的工作（信息表中填写）。每个小组只需要提交一份读书报告(PDF 格式)。

**三、要求：**

1、搜集、查阅、整理相关数据和资料，结合实际数据运用数学知识去理解实际问题。

2、通过完成读书报告了解数学学科的逻辑性。

3、提出问题：根据自己的生活经验和研究兴趣提出自己的问题。

4、解决问题：要有科学依据的运用数学知识去研究解决自己提出的问题或者对于自己感兴趣的实际问题有更进一步的理解。

**四、格式要求：**

1、读书报告要求有题目、作者情况（姓名、学院、专业、学号）、摘要、关键词、正文、参考文献共 6 个部分。

2、读书报告题目用黑体四号字，居中，单独成行；论文题目副标题用宋体 小四号字，居中，单独成行。。

3、摘 要、关键词等字样用黑体五号字体，后面紧跟黑体冒号；摘要、关键词内容用楷体五号字。摘要的内容一般不超过 150 个汉字。关键词之间以分号分割，最后一个关键词之后不加标点符号。关键词一般为 3 至 5 个。

4、文章正文内容用宋体五号字，不要在正文开始之前写“正文”两字。数学公式请一律用 word 的公式编辑器书写（在正文中出现的变量等也请用公式编辑器书写）。正文的第一级标题用黑体五号字，标题编号请用阿拉伯数字，如“1 前言”；正文第二级标题用楷体五号字，如“1.1 数学抽象的特点”，以下依次类 推。一般情况下，标题请不要超过三级。

5、插图应有图注。图注包含图的编号和图的说明两部分，如“图 1 文艺复兴时期的油画”，图注用加粗宋体小五号字，图注位于图的下方居中。即使全文只有 一幅插图，也需编号。

6、表格应有表头。表头包括表的编号和表的说明两部分，如“表 1 2007 年各月 的商品房平均售价”，表头用加粗宋体小五号字，表头位于表的上方居中。即使全文只有一张表格，也请编号。

7、参考文献位于正文最后，参考文献字样左对齐用黑体五号字，参考文献内容用楷体五号字。

8、全文行间距要求采用“1.5 倍行距”。

**三、评分标准：**

1、读书论文作业评分标准： 内容好——材料丰富、论据充分、独特见解、较有新意； 写作好——脉络清晰、用词准确、语言流畅、无错别字；

2、五个等级 ：A（90—100 分）B（80—89 分）C（70—79 分）D（60—69 分）E（59 分以下）

等级 A：论题集中，内容好，个人见解有新意，脉络清晰，写作严谨。

等级 B：有个人见解及相关论据，内容和表述较好。

等级 C：有较好的内容，但写得一般。

等级 D：内容一般，表述较差。

等级 E：言之无物，应付了事。或以小组形式完成而没写明所承担工作详细说明的。

**3、作弊评判：**

3.1 小论文作业允许引用所读书籍中的词句，允许参阅网上文章的内容，但是主要内容应该是自己的，主要的观点和脉络应该是自己的。

3.2 引用别人的材料应该注明出处；摘录的材料应与需要说明的观点相呼应。

3.3 如果出现雷同的小论文作业，则两者都判为“等级 E”；全部抄袭的为“0分”。

**四、其他：**

1、字数要求：读书报告作业要求为不少于 5 页。

2、格式要求：提交电子 PDF 版小论文，文件名格式要求：“学号+姓名+专业”（合作的读书报告写一个学号和姓名即可）。

**3、截止时间：2022.5.25 之前。截止日期后提交的论文如无重大原因,直接判定等级 E.**

**4、论文提交：论文通过邮箱(yxwangmath@163.com)提交,并且主题一律注明“文科数学读书报告”.**

# 3. 读书报告参考范文

## 对“无穷大旅馆”的一点探讨

## ——兼谈实无限与潜无限

**摘　要**：借助对有无穷多个房间的旅馆提出一系列问题并对这些问题加以解答，使用简单易懂的构造性证明的方法，简要介绍了可数无穷与连续统无穷的一些性质，最后引出“最大的无穷大不存在”这一结论。

关键词：无穷大；一一对应关系；自然数集合；实数集合；复数集合；基数

### 1　问题的提出

在现实中的旅馆，其房间数都是有限的。如果有一个有无穷多个房间的旅馆，这旅馆会挂出怎样的招牌呢？比如说，“本旅馆永远有房间”这句话，在只入住有限个客人时，是成立的，那么在客人的数量有无穷多个的时候，是否还能成立呢？

为了下面的讨论方便起见，先在这里简要地介绍一下比较两个无穷集合中元素个数多少的方法：两个无穷集合 $A$ 和 $B$，如果对于每一个 $a \in A$，都有一个 $b \in B$ 与之对应，反之亦然（即建立一一对应关系），那么我们认为 $A$ 和 $B$ 中的元素“一样多”。用专业的语言来讲，这两个集合是对等的，具有相同的基数。

凭借上面的方法，我们将开始对“无穷大旅馆”进行一系列的探讨，让旅馆中房间的数目一步步地增多起来，进而一步步得出各种惊人的结论。[i]

### 2　自然数旅馆

设想有一个旅馆（方便起见我们称之为“自然数旅馆”），其房间按自然数编号且有无穷多，即房间编号为 1, 2, 3, ⋯。假设每个房间都住有一人，然后我们提出如下一系列问题：

………

表面上看起来，由于每个房间都住有人，旅馆应该挂出“客满”的牌子

了，但实际上我们可以进行这样的安排：在又来了$n$个客人的时候，可以让 1 号房间的客人搬到$n$+1 号房间，让 2 号房间的客人搬到$n$+2 号房间……写成表格的形式就是（见表 1）：

**表 1　问题（1）的答案**

| 状态 | 已经入住的客人所在的房间号 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 调整前 | 1 | 2 | 3 | 4 | ··· | $m$ | ··· |
| 调整后 | $n$+1 | $n$+2 | $n$+3 | $n$+4 | ··· | $n+m$ | ··· |

这样，通过函数 $y=n+x$，我们重新建立了已经入住的客人和房间的一一对应关系，使得已经入住的每个人都有房间，而$1\sim n$号的房间被空出来了，正好给新来的$n$个人住。问题（1）顺利解决，“客满”的牌子是不用挂出去了。

………

我们可以考虑另外的方法，比较简单的一种是：把 1 号房间的客人移到 2 号房，2 号房的客人移到 4 号房，3 号房的客人移到 6 号房……写成表格的形式是（见表 2）：

**表 2 问题（2）的“2 倍”的解决方案**

| 状态 | 已经入住的客人所在的房间号 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 调整前 | 1 | 2 | 3 | 4 | ··· | $m$ | ··· |
| 调整后 | 2 | 4 | 6 | 8 | ··· | $2m$ | ··· |

通过函数 $y=2x$，我们又重新建立了已入住的客人和房间的一一对应关系。这样奇数号的房间被空出来了。于是新来的 1 号客人住入 1 号房，2 号客人住入 3 号房，···，$n$号客人入住$(2n-1)$号房，新来的客人和奇数号房间也有一一对应关系，问题（2）顺利解决。

…………

但问题并不是没有解决的方法，这里介绍两种方法：

方法 1：给这无穷多队客人（已经住在旅馆内的客人也包括在内）用一对自然数编号，如 1 队 1 号编为（1，1），1 队 2 号为（1，2），2 队 1 号为（2，1），……，$m$队$n$号则为（$m$，$n$）。然后这样排列（见图 1）：

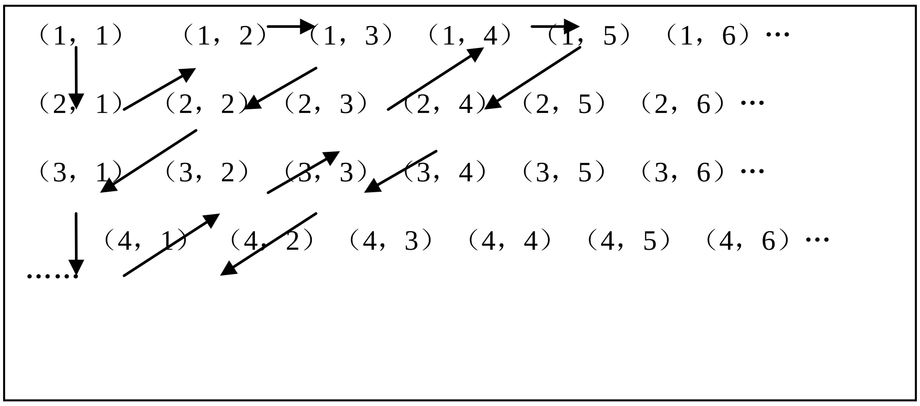


**图 1 问题（4）的方法 1**

按照图 1 中箭头指示的方向，让这一方向上遇到的第 1、2、3……个客人依次入住 1、2、3……号房间，问题得到解决。

方法 2：把房间的编号按照这样的形式排列起来，形成类似杨辉三角的形状（见图 2）：

………………

3　基数的概念

基数（Cardinal number）是反映集合中元素数目的一个数。康托尔对于基数的定义（英文原文）是这样的：

The power of cardinal number of M is what we call the general concept, which by the aid of our active capacity for thought arises from the set M when we make abstractions from the nature of its various elements M and order of their presentation.

……

4 实数旅馆

上面提到的那群清洁工对应的实际是实数的集合。

证明如下：给每个清洁工的编号前添上一个 0，在这个 0 和编号之间加入一个小数点，就得到了一个介于 0 和 1 之间的纯二进小数，如：0.0100100110010……

……

回到上面提过的一个函数：

$$y=\tan\pi(x-\frac{1}{2}),\quad x\in(0,1) \tag{1}$$

这个函数可以把（0, 1）间的实数和全体实数建立一一对应关系。所以可以让已经住满的实数旅馆内的所有客人作如下调整：让每个客人把自己的房间号（这是一个实数）代入函数 $y=\frac{\arctan x}{\pi}+\frac{1}{2}$，即 $y=\tan\pi(x-\frac{1}{2})$ 的反函数，得到的值也是一个实数，这个值就是他应该去的房间号。由于 $y=\frac{\arctan x}{\pi}+\frac{1}{2}$ 的值域是（0, 1），所以全体实数旅馆中的客人都可以住进编号从 0 到 1 的这些房间，而在区间（0, 1）外的广大区域被空出来了，仿照刚才用反正切函数压缩的方法，只要再来一个长度为 1 的区间，就可以顺利解决问题（3）。

……

## 5　寻找更大

走出实数旅馆后，我们的思维也许会感觉有些疲惫，因为我们为了构造一个又一个更大的无穷大，构造的过程已经变得越来越抽象。但是我们还可以继续问下去:“还有更大的无穷大吗？”

……

## 6 结束语：潜无穷与实无穷之争

本文所探讨的内容其实隐含着一个前提，即“无穷”可以被当作一个“被综合完成的实体”来研究。

在 19 世纪下半叶之前，人们普遍认为,“无穷”这个概念只是代表一种潜在的无限增长的可能性，而不是一个可以拿来研究的实体。如果用前面列举的无穷大旅馆的例子来解释，就是：你尽可以为这个旅馆添上一个又一个房间（并且永远添加下去)，但是想“建成”这样一家有无穷多房间的旅馆是绝对不可能的，更不要提入住无穷多个客人这种事情。

但是康托尔在 19 世纪 70～80 年代发表了《关于一切实代数数的一个性质》、《关于无穷线性点集》等一系列论文，他首次把无穷当作了一个“已经被综合完成的整体”，并研究其性质，进而得出了一系列结论（如因为任何一个集合的所有子集构成的集合，总是有更大的基数，所以“所有集合的集合”根本不存在等)，在数学界引起了轩然大波。康托尔本人遭到来自数学界和哲学界众多权威的反对，自己最终也因研究结果得不到承认而陷入精神失常。

这场潜无穷与实无穷的争论至今还在继续，而且早已超出数学领域，把众多的哲学家也卷入其中——的确，“无穷究竟只是一种无限增长的可能性还是一个完成了的实体”这个问题确实太形而上了。

不过在今天，我们还是看到康托尔的观点逐渐得到了越来越多的人的认可；而且，不论这场争论的最终结果如何，康托尔的这种思索问题的方式，对于我们未尝不是一种有益的启迪。

**参考文献：**

[1]唐璐、付雪，数学爵士乐，湖南科学技术出版社 2007 年 6 月第 1 版.

[2]黄克宁，无穷与集合. 徐氏基金会出版部 1968 年 11 月 5 日初版.