文科概率统计

3.7 参数估计

3.7.1 估计量

数理统计的基本问题之一是怎样从样本中所获得的信息来推断总体的统计规律性，对于某些现象，我们常可以通过实践或理论上的推导来断定总体 X 的概率分布的类型，但其分布的某些参数未知.

定义 用来估计总体的参数或总体分布的数字特征(如总体均值、总体方差等)的统计量称为**估计量**.

它们之间的关系如下图所示：

$$\text{样本} \xrightarrow{\text{构成}} \underset{(\text{估计量})}{\text{统计量}} \xrightarrow{\text{估计}} \text{总体的参数}$$

定义 对参数的估计称为**参数估计**.

参数估计是数理统计的基本内容之一，它分为点估计和区间估计两种.

3.7.2 点估计

若已知总体的分布,但其中的一个或几个参数是未知的,根据抽取的样本,估计未知参数的值,就是参数的估计问题.

设 θ 是总体 X 的待估计的参数,$\hat{\theta}=f(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的一个统计量,如果用$\hat{\theta}$ 来估计 θ,则称$\hat{\theta}=f(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为 θ 的一个**估计量**,$\hat{\theta}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为 θ 的一个**估计值**,其中$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为样本观测值.

定义 用统计量$\hat{\theta}$ 去作未知参数 θ 的估计量的估计,称为参数的**点估计**.

点估计是运用样本数据来计算一个单一的估计值,以此来估计总体参数值.点估计不能给出误差范围的大小,而这种误差,在估计中是必然发生的.点估计也没有给出估计的可靠程度,而这种可靠程度是完善的估计中所要求的.如何估计这个参数近似值的精确性和可靠性是区间估计要解决的问题.

点估计中关键是估计量$\hat{\theta}$ 的建立,在统计中,常用的建立估计量的方法为矩估计法.

3.7.3 矩估计法

矩估计法是求估计量的最古老的直观方法. 它的基本思想就是用样本的平均值 $\bar{X}$ 去估计总体的数学期望 $E(X)$,用样本的统计量 $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 去估计总体的方差 $D(X)$,即

$$\widehat{E(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X},$$

$$\widehat{D(X)} = S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

例 3.7.1 某灯泡厂从某天生产的一批灯泡中任取 10 个进行寿命试验,得到数据(以小时计)如下:

1 050,1 100,1 080,1 120,1 200,1 250,1 040,1 130,1 300,1 200.

用矩估计法估计这天生产的整批灯泡的平均寿命及均方差.

解 设整批灯泡寿命为 X,则其平均寿命为 $E(X)$,均方差为 $\sqrt{D(X)}$.

由矩估计法公式有

$$\widehat{E(X)}=\bar{X}$$

$$=\frac{1}{10}(1\ 050+1\ 100+1\ 080+1\ 120+1\ 200+1\ 250+1\ 040+1\ 130+1\ 300+1\ 200)=1\ 147,$$

$$S_n^2=\frac{1}{10}[(1\ 050-1\ 147)^2+(1\ 100-1\ 147)^2+(1\ 080-1\ 147)^2+(1\ 120-1\ 147)^2+(1\ 200-1\ 147)^2+(1\ 250-1\ 147)^2+(1\ 040-1\ 147)^2+(1\ 130-1\ 147)^2+(1\ 300-1\ 147)^2+(1\ 200-1\ 147)^2]=6\ 821,$$

$$\widehat{D(X)}=S_n^2=6\ 821,\qquad \sqrt{\widehat{D(X)}}=82.59.$$

例 3.7.2 设总体 X 在 $[\mu-\rho,\mu+\rho]$ 上服从均匀分布，μ、ρ 未知，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是一个样本，试估计参数 μ 和 ρ.

解 因为总体 X 服从 $[\mu-\rho,\mu+\rho]$ 上的均匀分布，而均匀分布的数学期望

$$E(X)=(\mu+\rho+\mu-\rho)/2=\mu,$$

方差 $D(X)=(\mu+\rho-\mu+\rho)^2/12=\rho^2/3.$

由矩估计法： $$\hat{\mu}=\widehat{E(X)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X},$$

$$\widehat{D(X)}=\frac{1}{3}\hat{\rho}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

所以 $$\hat{\rho}=\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}.$$

设总体X服从$[0, a]$上的均匀分布，现从总体中抽取一个样本容量为5的样本，

样本观测值为4, 6, 7, 3, 5, 则未知参数a的矩估计值为

设总体 X 服从 $[0, a]$ 上的均匀分布，现从总体中抽取一个样本容量为 5 的样本，

样本观测值为 4, 6, 7, 3, 5, 则未知参数 a 的矩估计值为<u>__10</u>.

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta(0<\theta<\frac{1}{2})$ 是未知参数。若 3, 1, 3, 0, 2, 1, 3 是来自总体 X 的样本观察值，θ 的矩

估计值为

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta(0<\theta<\frac{1}{2})$ 是未知参数。若 3, 1, 3, 0, 2, 1, 3 是来自总体 X 的样本观察值，θ 的矩

估计值为 $\frac{2}{7}$

设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta, \\ 0, & 其他,\end{cases}$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体 X 的简单随机样本，则未知参数 θ 的矩估计量是

设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ ，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是总体 X 的简单随机样本，则未知参数 θ 的矩估计量是 $2\overline{X}$.

3.7.4 估计量的优劣标准

假定总体X中一共有N个数据$\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$，那么按照定义，总体X的期望为

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i$$

总体的方差为

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(a_i - \mu)^2$$

在应用中，由于N过大，或者其他实际原因，可能导致我们无法得到全体a_i的值，因此也就无法按照定义计算出期望μ和方差σ^2。我们希望借助抽样，对总体X的μ和σ^2进行估计。

对总体X进行n次抽样，得到$X_1, X_2, \ldots, X_n$。这是n个互相独立且都与X同分布的随机变量。在实际应用中，n往往远小于N，从而方便我们分析抽样的结果。我们希望通过对于$X_1, X_2, \ldots, X_n$的计算处理，估计出总体X的μ和σ^2。前面提到的矩估计法给了一个常见的思路。那就是用样本均值

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

估计总体X的μ，用

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

估计总体X的σ^2。

需要注意的是，这里的$\bar{X}$和S_n^2都是随机变量。完成实验并记录相应的观测值$x_1, x_2, \ldots, x_n$后，我们可以计算出一组相应的对μ和σ^2的估计值。

1. 无偏估计

定义 若$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是总体 X 的参数 θ 的一个点估计量，且 $E(\hat{\theta}) = \theta$，则称$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是参数 θ 的**无偏估计量**.

接下来我们将看到，$\bar{X}$是对总体期望μ的一个“好”的估计（无偏估计）。而S_n^2则不是一个对总体方差σ^2的“好”的估计（无偏估计）。一个更好的对总体方差σ^2的估计是样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

例 3.7.3 从总体 X 中取一样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，$E(X) = \mu$，$D(X) = \sigma^2$. 试证明：样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是总体均值 μ 的无偏估计量.

证 因为 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的样本，所以 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的，且与总体 X 服从相同的分布，即

$$E(X_i) = \mu, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

由数学期望的性质可知，

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu = \mu,$$

所以，$\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计量.

我们也可以计算S_n^2的数学期望

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_n^2) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left((X_i-\overline{X})^2\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu+\mu-\overline{X})^2\right) \\
&= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left((X_i-\mu)^2-2(X_i-\mu)(\overline{X}-\mu)+(\overline{X}-\mu)^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(\overline{X}-\mu)+n(\overline{X}-\mu)^2\right) \\
&= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2n(\overline{X}-\mu)(\overline{X}-\mu)+n(\overline{X}-\mu)^2\right) \\
&= \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\overline{X}-\mu)^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}E\left((X_i-\mu)^2\right)-nE\left((\overline{X}-\mu)^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

化简可得

$$E(S_n^2) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} DX_i - nD\bar{X}\right)$$

$$E(S_n^2) = \frac{1}{n}\left(n\sigma^2 - n\cdot\frac{\sigma^2}{n}\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

因此， S_n^2不是对于总体X方差σ^2的无偏估计，而样本方差则是。

$$E(S^2) = \frac{n}{n-1}E(S_n^2) = \sigma^2$$

3.7.5 区间估计

前面讨论了未知参数的点估计,即怎样根据样本求出未知参数的点估计量.点估计值仅仅是未知参数的一个近似值,并且它没有反映出这个近似值的误差范围.而在实际问题中,不仅需要求出参数的近似值,还要大致估计这个近似值的精确性和可靠性.

定义 设 θ 是总体 X 的一个待估计的参数,$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$分别是两个统计量,且满足

$$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha,$$

称区间$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$是 θ 的**区间估计**,$1-\alpha$ 是**置信度**,即估计的可靠性或可信度.$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$又称为 θ 的 $1-\alpha$ 置信度下的**置信区间**.而 α 是事先给定的一个小正数,它是指参数估计不准的概率(假设检验中称 α 为**检验水平**),一般 $\alpha=5\%$ 或$\alpha=1\%$.

区间估计在对总体参数作估计时给出总体参数所落入的范围,它期望所估计的参数的真值能落在一个区间上限和下限范围之内,并给出一个可靠程度指标,即用一定概率来保证总体参数落在给定的区间之内.

3.7.6 单个正态总体均值的区间估计

1. 总体方差 σ^2 已知

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$（σ^2 已知），$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体的一个样本，求未知参数 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间.

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体 X 的一个样本，样本均值为 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$，且由3.6抽样分布中的结论可知

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

统计量的选取有两个要求：

(1) 统计量中要含有待估计的参数，而不能含有其他未知参数.

(2) 统计量的分布是已知的.

对于给定的置信度 $1-\alpha$，由正态分布的密度曲线的对称性，寻找临界值 $U_{\alpha/2}$，使得

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geqslant U_{\frac{\alpha}{2}}\right)=\alpha,$$

即 $P\left(-U_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<U_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$，所以 $\Phi(U_{\alpha/2})-\Phi(-U_{\alpha/2})=1-\alpha$（其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数），如图 3.39 所示.

而 $$\Phi(-U_{\frac{\alpha}{2}})=1-\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}}),$$

所以 $$\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}.$$

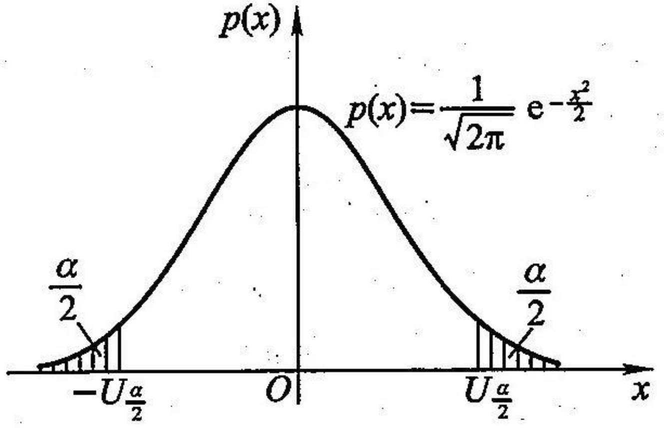

图 3.39

对于给定的 α 的值，反查标准正态分布函数数值表（附表 2），就可以得到临界值 $U_{\frac{\alpha}{2}}$. 由得到这个临界值 $U_{\frac{\alpha}{2}}$ 及不等式

$$-U_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<U_{\frac{\alpha}{2}}$$

可以推得 $$\bar{X}-U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

根据一组样本数据观测值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，计算样本均值的观测值 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$，可得一个具体的关于 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间

$$\left(\bar{x} - U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \bar{x} + U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

即我们有 $(1-\alpha)$ 的可能性判定 μ 落在上述区间内.

例 3.7.5 一饮料机器所装饮料量 X 服从正态分布，其标准差为 15 mL. 今取 36 杯饮料为随机样本，得每杯的平均含量为 250 mL. 求该机器所装饮料之每杯平均含量 μ 的 95% 置信区间.

解 由已知得到

$$n=36, \sigma=15, \bar{x}=250, \alpha=0.05.$$

由于 $X \sim N(\mu, 15^2)$，选取

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

$$P\left(-U_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<U_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha=0.95,$$

所以

$$\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}})-\Phi(-U_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha=0.95,$$

即

$$\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}=0.975.$$

查表得临界值 $U_{0.025}=1.96$，由上述公式 μ 的 95% 的置信区间为

$$\left(250-1.96\times\frac{15}{\sqrt{36}}, 250+1.96\times\frac{15}{\sqrt{36}}\right)=(245.1, 254.9).$$

即有 95% 的把握判定该机器所装饮料之每杯平均含量在 $(245.1, 254.9)$ mL 范围内.

在许多实际问题中，总体 X 所服从的正态分布中的方差 σ^2 是未知，对于这种情形有.

2. 总体方差 σ^2 未知

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$（σ^2 未知），$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体的一个样本，求未知参数 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间.

由于 σ^2 未知，在单个正态总体均值的区间估计（σ^2 已知）中所介绍的置信区间半径是未知的，可用样本方差 S^2 来代替 σ^2.

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体 X 的一个样本，样本均值为 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$，样本方差为 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$，且由 3.6.6 节中的结论 2 可知

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

如图 3.40 所示，对于给定的置信度 $1-\alpha$，由 t 分布的密度曲线关于 y 轴对称，寻找临界值 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，使得

$P\left(\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| \geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=\alpha$，且 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 不依赖于 μ. 由此可得

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\alpha,$$

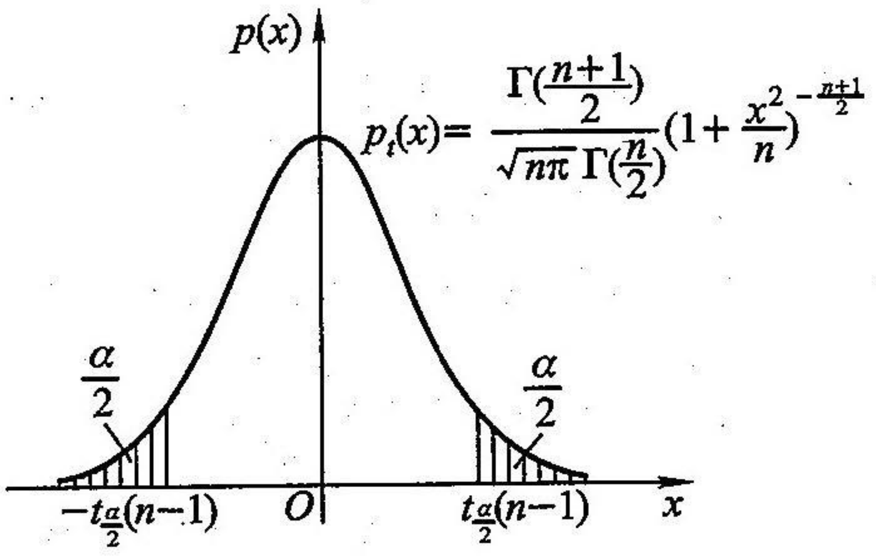

图 3.40

对于给定的 α 的值,查自由度为 $n-1$ 的 t 分布临界值表(附表3),就可以得到临界值 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

得到临界值 $t_{\alpha/2}(n-1)$后,由不等式

$$-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

可以推得
$$\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

根据一组样本数据观测值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,计算样本均值的观测值 $\bar{x}$,标准差的观测值 s,可得一个具体的关于 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间

$$\left(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

即我们有$(1-\alpha)$的可能性判定 μ 落在上述区间内.

例 3.7.6 从一大批相同型号的金属线中，随机选取 10 根，测得它的直径(单位：mm)为

1.23 1.24 1.26 1.29 1.20 1.32 1.23 1.23 1.29 1.28.

(1) 如果金属线直径 $X \sim N(\mu, 0.04^2)$，试求平均直径 μ 的置信度为 95% 的置信区间；

(2) 如果金属线直径 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 未知，试求平均直径 μ 的置信度为 95% 的置信区间.

解 (1) 因为总体 $X \sim N(\mu, 0.04^2)$，$\sigma = 0.04$ 已知，所以选用统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

已知 $\alpha = 0.05$，查标准正态分布函数数值表(附表 2)可得临界值 $U_{0.025} = 1.96$，

且 $\bar{x} = \frac{1}{10}(1.23 + 1.24 + 1.26 + 1.29 + 1.20 + 1.32 + 1.23 + 1.23 + 1.29 + 1.28) = 1.257.$

因此金属线平均直径 μ 的置信度为 95% 的置信区间是

$$\left(1.257 - 1.96 \times \frac{0.04}{\sqrt{10}}, 1.257 + 1.96 \times \frac{0.04}{\sqrt{10}}\right) = (1.232\ 2, 1.281\ 8).$$

（2）因为总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ 未知，所以选用统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

已知 $\alpha=0.05$，$n-1=9$，查自由度为 9 的 t 分布临界值表（附表 3），可得临界值 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(9)=2.2622$，

且
$$\bar{x}=1.257, s^2=\frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=0.0371^2,$$

由上述公式得到金属线平均直径 μ 的 95% 的置信区间是

$$\left(1.257-2.2622\times\frac{0.0371}{\sqrt{10}},1.257+2.2622\times\frac{0.0371}{\sqrt{10}}\right)=(1.2305,1.2835).$$

由此题我们可以看出，当总体方差已知时，所得到的总体均值的置信区间要比方差未知时的置信区间小，即准确性高.

3.7.7 非正态总体均值的区间估计($n \geqslant 50$)

若总体 X 不是服从正态分布的，则因为样本函数的分布不易确定，所以要讨论总体分布中未知参数的区间估计就比较困难了. 当样本容量 n 很大时，根据中心极限定理来解决这个问题.

1. 总体方差 σ^2 已知

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体 X 的一个样本，$E(X)=\mu<\infty$，$D(X)=\sigma^2<\infty$ (σ^2 已知)，X 不是正态分布，当 n 充分大时 ($n\geqslant 50$)，由中心极限定理可知

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ 近似服从 } N(0,1).$$

同单个正态总体均值的区间估计 (σ^2 已知) 的分析过程相同，根据一组样本数据观测值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，可以求出总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{x}-U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}+U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

例 3.7.7 某电子厂商制造出来的灯泡,其寿命的标准差为 40 h. 现取 100 个灯泡为一随机样本,其平均寿命为 780 h,求该厂商所生产灯泡的总体的平均寿命 μ 的 99% 的置信区间.

解 设灯泡寿命为随机变量 X,按题意 $D(X)=\sigma^2=40^2$,$n=100$,因此选取统计量

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ 近似服从 } N(0,1).$$

又已知 $\alpha=0.01$,$\Phi(U_{\alpha/2})=1-\alpha/2$,反查标准正态分布函数数值表(附表 2),得临界值 $U_{\alpha/2}=U_{0.005}=2.575$. 根据 $\bar{x}=780$,因此,总体平均寿命 μ 的 99% 的置信区间是

$$\left(\bar{x}-U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(780-2.575\times\frac{40}{10},780+2.575\times\frac{40}{10}\right)$$

$$=(769.7,790.3).$$

2. 总体方差 σ^2 未知

前面讨论了非正态总体均值的区间估计(σ^2已知,$n \geqslant 50$).但是在实际问题中,总体方差 σ^2往往是未知的,因此有下面的结论.

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为总体 X 的一个样本,$E(X)=\mu<\infty$,$D(X)=\sigma^2<\infty$(σ^2未知),X 不是正态总体,当 n 充分大时($n \geqslant 50$),由中心极限定理可知,$\bar{X}$ 近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2/n)$.而由抽样分布中的结论,得到

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

又由于 n 充分大时($n>30$),t 分布近似于标准正态分布.因此

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \text{ 近似服从 } N(0,1),$$

即若总体方差 σ^2未知,只要 n 充分大,就可用样本方差 S^2代替总体方差 σ^2.

与单个正态总体均值区间估计(σ^2已知)的分析过程类似,根据一组样本数据观测值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,可以求出总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{x}-U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

(其中 $U_{\alpha/2}$为临界值,其值可通过查标准正态分布函数数值表得到).

例 3.7.8 取 50 个大学生为随机样本，其平均身高为 174.5 cm，样本标准差为 6.9 cm. 求所有大学生平均身高的 95% 的置信区间.

解 设所有大学生的身高为 X，X 是非正态分布，且 σ^2 未知，$n=50$，因此选取统计量

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \text{ 近似服从 } N(0,1).$$

又已知 $\alpha=0.05$，$\Phi(U_{\alpha/2})=1-\alpha/2$，反查标准正态分布函数数值表(附表 2)，得临界值.

$$U_{\alpha/2}=U_{0.025}=1.96, \bar{x}=174.5, s=6.9.$$

因此，所有大学生平均身高 μ 的 95% 的置信区间是

$$\left(\bar{x}-U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x}+U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=\left(174.5-1.96\times\frac{6.9}{\sqrt{50}}, 174.5+1.96\times\frac{6.9}{\sqrt{50}}\right)$$

$$=(172.5874, 176.4126).$$

3.7.8 两个正态总体均值之差的区间估计

前面讨论了单个正态总体均值的区间估计，但是在实际问题中常常会遇到需要同时处理两个正态总体的情况. 例如，两批原材料所生产的产品，不同班组生产的产品等，需要比较它们之间的质量的高低，或者要分析它们的质量差异有多大. 由于产品的质量特性指标为随机变量，并且生产条件的改变只影响均值，对方差影响不大. 所以要比较两批产品质量好坏，最优策略是比较它们的平均质量. 于是问题归结为：

1. 两正态总体方差 σ_1^2、σ_2^2 已知

设有两个正态总体 X 与 Y，且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$ 为来自总体 X 的样本，$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})$ 为来自总体 Y 的样本，并且两组样本相互独立，求总体均值之差 $\mu_1 - \mu_2$ 的 $1-\alpha$ 置信区间.

记 $$\bar{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}X_k,\quad \bar{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{k=1}^{n_2}Y_k,$$

$$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{k=1}^{n_1}(X_k-\bar{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{k=1}^{n_2}(Y_k-\bar{Y})^2$$

分别是总体 X 与总体 Y 的样本均值和样本方差.

记$(x_1,x_2,\cdots,x_{n_1})$为总体 X 的一组样本观测数据;$(y_1,y_2,\cdots,y_{n_2})$为总体 Y 的一组样本观测数据.

由 3.6.6 抽样分布中的结论可知

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$$

即 $$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1).$$

如图 3.41 所示，对于给定的置信度 $1-\alpha$，由正态分布密度曲线的对称性，寻找临界值 $U_{\frac{\alpha}{2}}$，使得

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right| \geqslant U_{\frac{\alpha}{2}}\right)=\alpha, P\left(-U_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}<U_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha,$$

所以 $\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}})-\Phi(-U_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha$

（其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数），而

$$\Phi(-U_{\frac{\alpha}{2}})=1-\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}}),$$

所以 $\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}.$

对于给定的 α 的值，反查标准正态分布函数数值表（附表 2），就可以得到临界值 $U_{\frac{\alpha}{2}}$.

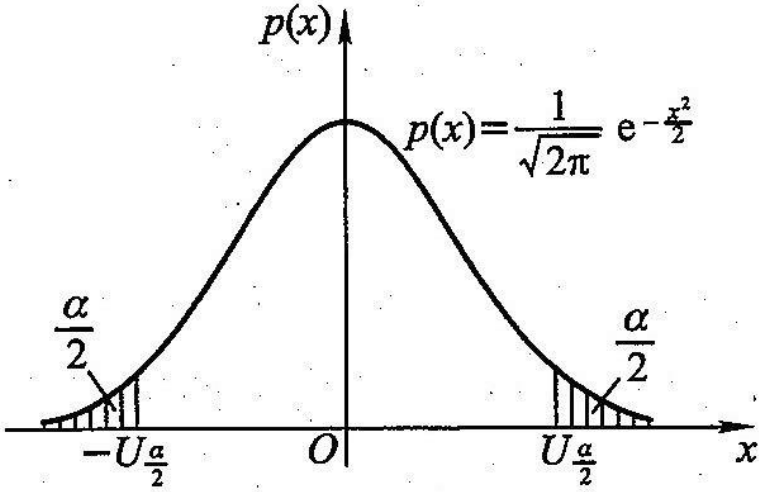

图 3.41

得到临界值 $U_{\alpha/2}$后，由不等式

$$-U_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < U_{\frac{\alpha}{2}}$$

可以推得

$$\bar{X}-\bar{Y}-U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < \bar{X}-\bar{Y}+U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

根据样本观测数据$(x_1,x_2,\cdots,x_{n_1})$，$(y_1,y_2,\cdots,y_{n_2})$可计算样本均值的观测值 $\bar{x}$、$\bar{y}$，代入上述公式，就可以得到一个关于 $\mu_1-\mu_2$的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left((\bar{x}-\bar{y})-U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},(\bar{x}-\bar{y})+U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right),$$

即有$(1-\alpha)$的可能性判定 $\mu_1-\mu_2$落在上述区间内.

特别地，当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时，$\mu_1-\mu_2$的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left((\bar{x}-\bar{y})-U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sigma,(\bar{x}-\bar{y})+U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sigma\right).$$

例 3.7.9 从一个 $\sigma_1=5$ 的正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 中选出大小为 25 的随机样本，其 $\bar{x}=80$；从另一个 $\sigma_2=3$ 的正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中选出大小为 36 的随机样本，其 $\bar{y}=75$. 求两个总体均值之差 $\mu_1-\mu_2$ 的 95% 的置信区间.

解 由于两个总体方差 $\sigma_1=5,\sigma_2=3$ 已知，选取统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1).$$

由题意 $\alpha=0.05$，所以

$$\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}=0.975.$$

反查标准正态分布函数数值表（附表 2），得临界值 $U_{\alpha/2}=U_{0.025}=1.96$.

又已知 $\bar{x}=80,\bar{y}=75,n_1=25,n_2=36$，所以 $\mu_1-\mu_2$ 的 95% 的置信区间为

$$\left((80-75)-1.96\sqrt{\frac{25}{25}+\frac{9}{36}},(80-75)+1.96\sqrt{\frac{25}{25}+\frac{9}{36}}\right)=(2.8087,7.1913).$$

例 3.7.10 一家银行负责人想知道储户存入两家银行的钱数，他从每家银行各抽了一个由 25 户构成的样本. 银行 A 与 B 的样本均值分别为 450 元和 325 元，假定两个总体服从方差分别为 $\sigma_A^2=750$、$\sigma_B^2=850$ 的正态分布. 求(1)两家银行总体均值之差 $\mu_A-\mu_B$ 的 95% 的置信区间；(2) 两家银行总体均值之差 $\mu_A-\mu_B$ 的 99% 的置信区间.

解 由于两批用户是各自随机抽取的，且已知两个总体的方差 $\sigma_A^2=750$，$\sigma_B^2=850$. 选取统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_A-\mu_B)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_A^2}{n_A}+\dfrac{\sigma_B^2}{n_B}}}\sim N(0,1).$$

（1）当 $\alpha=0.05$ 时，

$$\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}=0.975.$$

反查标准正态分布函数数值表(附表 2)，得临界值 $U_{\frac{\alpha}{2}}=U_{0.025}=1.96.$

又已知 $\bar{x}=450,\bar{y}=325,n_A=n_B=25$，所以 $\mu_A-\mu_B$ 的 95% 的置信区间为

$$\left((450-325)-1.96\sqrt{\frac{750}{25}+\frac{850}{25}},(450-325)+1.96\sqrt{\frac{750}{25}+\frac{850}{25}}\right)$$

$$=(109.32,140.68).$$

（2）当 $\alpha=0.01$ 时，

$$\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}=0.995.$$

反查标准正态分布函数数值表(附表 2)，得临界值 $U_{\frac{\alpha}{2}}=U_{0.005}=2.575$，所以 $\mu_A-\mu_B$ 的 99% 的置信区间为

$$\left((450-325)-2.575\sqrt{\frac{750}{25}+\frac{850}{25}},(450-325)+2.575\sqrt{\frac{750}{25}+\frac{850}{25}}\right)$$

$$=(104.4,145.6).$$

实际问题中，总体 X 与总体 Y 所服从的正态分布的方差 σ_1^2、σ_2^2是未知的，因此有

2．两正态总体方差 σ_1^2,σ_2^2未知（$n_1,n_2\geqslant 50$）

在实际问题中，如果所遇到的两个正态总体，其方差都是未知的，而 σ_1^2与 σ_2^2未必相等，当分别来自两个总体的样本容量 n_1和 n_2都很大（$n_1,n_2\geqslant 50$）时，我们可以导出如下的区间估计.

设两个正态总体 X 与 Y，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$为来自总体 X 的样本，$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})$为来自总体 Y 的样本，并且两组样本相互独立，σ_1^2、σ_2^2未知，求总体均值之差 $\mu_1-\mu_2$的 $1-\alpha$ 置信区间.

记 $$\bar{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{k=1}^{n_1}X_k,\qquad \bar{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{k=1}^{n_2}Y_k,$$

$$S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{k=1}^{n_1}(X_k-\bar{X})^2,\qquad S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{k=1}^{n_2}(Y_k-\bar{Y})^2$$

分别是总体 X 与总体 Y 的样本均值和样本方差.

设$(x_1,x_2,\cdots,x_{n_1})$为总体 X 的一组样本观测数据;$(y_1,y_2,\cdots,y_{n_2})$为总体 Y 的一组样本观测数据.

因为 σ_1^2、σ_2^2未知,则由 3.6.6 中的结论 2 得到

$$\frac{\bar{X}-\mu_1}{S_1/\sqrt{n_1}}\sim t(n_1-1),\qquad \frac{\bar{Y}-\mu_2}{S_2/\sqrt{n_2}}\sim t(n_2-1).$$

当 n_1、n_2都充分大时($n_1\geqslant 50,n_2\geqslant 50$),$t$ 分布近似于标准正态分布,即 $\bar{X}$ 近似服从 $N(\mu_1,S_1^2/n_1)$,$\bar{Y}$ 近似服从 $N(\mu_2,S_2^2/n_2)$. 由数学期望和方差的性质知,$\bar{X}-\bar{Y}$ 近似服从 $N(\mu_1-\mu_2,S_1^2/n_1+S_2^2/n_2)$, 即

$$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$

近似服从 $N(0,1)$.

同两个正态总体均值之差的区间估计（σ_1^2、σ_2^2已知）比较，可以看出在大样本情况下，可用 S_1^2和 S_2^2代替 σ_1^2和 σ_2^2来进行区间估计.

与两个正态总体均值之差的区间估计（σ_1^2、σ_2^2已知）的分析过程相同，根据样本观测数据$(x_1, x_2, \cdots, x_{n_1})$、$(y_1, y_2, \cdots, y_{n_2})$，计算样本均值的观测值 $\bar{x}$ 与 $\bar{y}$，样本方差的观测值 s_1^2与 s_2^2，可以求出近似的两个总体均值之差 $\mu_1 - \mu_2$的$1-\alpha$ 置信区间为

$$\left((\bar{x}-\bar{y}) - U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}, (\bar{x}-\bar{y}) + U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}\right)$$

例 3.7.11 50 名女生和 75 名男生参加某标准化考试. 这些女生的平均分数 76 分,样本标准差为 6;这些男生的平均分数为 82 分,样本标准差为 8. 假设男生和女生的考试成绩服从正态分布,μ_1表示所有男生的平均分数,μ_2为所有女生的平均数,求 $\mu_1-\mu_2$ 的 95% 的置信区间.

解 由于两个总体的方差未知,$n_1=75$,$n_2=50$,有统计量

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \quad \text{近似服从 } N(0,1)$$

已知 $\alpha=0.05$,$\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}})=1-\dfrac{\alpha}{2}=0.975$,反查标准正态分布函数数值表(附表 2),得临界值 $U_{0.025}=1.96$.

又已知 $\bar{x}=82$,$\bar{y}=75$,$S_1=8$,$S_2=6$

所以 $\mu_1-\mu_2$ 的 95% 的置信区间为

$$\left((82-76)-1.96\sqrt{\frac{64}{75}+\frac{36}{50}},(82-76)+1.96\sqrt{\frac{64}{75}+\frac{36}{50}}\right)$$

$$=(3.5415,8.4585).$$

综合前面的讨论，可以给出总体参数的置信区间表.

总体参数的置信区间表

总　　体	被估参数	条　　件	$(1-\alpha)$置信区间
$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2已知	$\bar{x} \pm U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
		σ^2未知	$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$
一般总体	$E(X)$	$n \geqslant 50, \sigma^2$已知	$\bar{x} \pm U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ （近似）
		$n \geqslant 50, \sigma^2$未知	$\bar{x} \pm U_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}$ （近似）
$N(\mu_1,\sigma_1^2)$ $N(\mu_2,\sigma_2^2)$	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$\bar{x}-\bar{y} \pm U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
		σ_1^2,σ_2^2未知 $n_1,n_2 \geqslant 50$	$\bar{x}-\bar{y} \pm U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$（近似）

已知部分分布数据

t 分布临界值表： $t_{0.025}(15)=2.1315$， $t_{0.025}(16)=2.1199$， $t_{0.05}(15)=1.7531$， $t_{0.05}(16)=1.7459$

标准正态分布表： $\Phi(0)=0.5$、$\Phi(1)=0.8413$、 $\Phi(1.5)=0.9332$、

$\Phi(1.65)=0.95$、 $\Phi(1.96)=0.975$、 $\Phi(2)=0.9772$

总体 $X\sim N(\mu,\ 20^2)$，从总体 X 中抽取一个容量为 16 的样本，得到 $\bar{x}=25$，

则总体均值 μ 的 95%的置信区间为

已知部分分布数据

t 分布临界值表： $t_{0.025}(15)=2.1315$， $t_{0.025}(16)=2.1199$， $t_{0.05}(15)=1.7531$， $t_{0.05}(16)=1.7459$

标准正态分布表： $\Phi(0)=0.5$、$\Phi(1)=0.8413$、 $\Phi(1.5)=0.9332$、

$\Phi(1.65)=0.95$、 $\Phi(1.96)=0.975$、 $\Phi(2)=0.9772$

总体 $X\sim N(\mu,\ 20^2)$，从总体 X 中抽取一个容量为 16 的样本，得到 $\bar{x}=25$，

则总体均值 μ 的 95%的置信区间为__（15.2，34.8）__.

已知部分分布数据

t 分布临界值表： $t_{0.025}(15)=2.1315$， $t_{0.025}(16)=2.1199$， $t_{0.05}(15)=1.7531$， $t_{0.05}(16)=1.7459$

标准正态分布表： $\Phi(0)=0.5$、$\Phi(1)=0.8413$、 $\Phi(1.5)=0.9332$、

$\Phi(1.65)=0.95$、 $\Phi(1.96)=0.975$、 $\Phi(2)=0.9772$

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，从总体 X 中抽取一个容量为 16 的样本，得到样本均值

$\bar{x}=25$，样本标准差 $s=5$，则总体均值 μ 的 95%的置信区间为

已知部分分布数据

t 分布临界值表： $t_{0.025}(15)=2.1315$， $t_{0.025}(16)=2.1199$， $t_{0.05}(15)=1.7531$， $t_{0.05}(16)=1.7459$

标准正态分布表： $\Phi(0)=0.5$、$\Phi(1)=0.8413$、 $\Phi(1.5)=0.9332$、

$\Phi(1.65)=0.95$、 $\Phi(1.96)=0.975$、 $\Phi(2)=0.9772$

设总体 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，从总体 X 中抽取一个容量为 16 的样本，得到样本均值

$\bar{x}=25$，样本标准差 $s=5$，则总体均值 μ 的 95%的置信区间为$\underline{(22.34,\ 27.66)\ }$.

已知部分分布数据

t分布临界值表： $t_{0.025}(15)=2.1315$， $t_{0.025}(16)=2.1199$， $t_{0.05}(15)=1.7531$， $t_{0.05}(16)=1.7459$

标准正态分布表： $\Phi(0)=0.5$、$\Phi(1)=0.8413$、 $\Phi(1.5)=0.9332$、

$\Phi(1.65)=0.95$、 $\Phi(1.96)=0.975$、 $\Phi(2)=0.9772$

已知一批零件的长度 X（单位：cm）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从中随机抽取 16 个零件，测得其平均长度为 40cm，样本标准差为 3cm，则 μ 的置信度为 95%的置信区间为

已知部分分布数据

t 分布临界值表：$t_{0.025}(15)=2.1315$，$t_{0.025}(16)=2.1199$，$t_{0.05}(15)=1.7531$，$t_{0.05}(16)=1.7459$

标准正态分布表：$\Phi(0)=0.5$、$\Phi(1)=0.8413$、$\Phi(1.5)=0.9332$、

$\Phi(1.65)=0.95$、$\Phi(1.96)=0.975$、$\Phi(2)=0.9772$

已知一批零件的长度 X（单位：cm）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从中随机抽取 16 个零件，测得其平均长度为 40cm，样本标准差为 3cm，则 μ 的置信度为 95%的置信区间为__(38.401，41.599)__。