文科概率统计

3.5 随机变量的数字特征

随机变量的概率分布和密度函数能够全面完整地描述随机变量.但是在实际问题中,要求出随机变量的分布是比较困难的,而且在很多情况下,并不需要全面考察随机变量的变化情况,而只要知道某些方面的特征.能够刻画随机变量某种特征的量叫做随机变量的数字特征.数字特征虽然不一定能够完整地描述随机变量,但是它能够描述随机变量在某些方面的重要特性.因此,研究随机变量的数字特征在理论上和实际中都有重要的意义.为此我们将介绍能够反映随机变量取值的集中性和分散性的数字特征:数学期望和方差.

数学期望是度量一随机变量取值集中位置或平均水平的最基本的数字特征.

3.5.2 离散型随机变量的数学期望

定义 设离散型随机变量ξ的概率分布为

$$P(\xi = x_k) = p_k \quad (k = 1,2,\cdots).$$

则称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量ξ的**数学期望**,简称期望. 记为$E(\xi)$,即

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

显然,数学期望由概率分布唯一确定,以后我们也称之为某概率分布的数学期望.

例 3.5.2 一批产品中有一、二、三等品、等外品及废品 5 种,相应的概率分别为 0.7、0.1、0.1、0.06 及 0.04,若其单位产品产值分别为 6 元、5.4 元、5 元、4 元及 0 元,求单位产品的平均产值.

解 单位产品的产值 ξ 是一随机变量,根据题意,它的概率分布列如下表:

ξ	6.0	5.4	5.0	4.0	0
$P(\xi = x_k)$	0.7	0.1	0.1	0.06	0.04

因此

$$E(\xi) = 6.0 \times 0.7 + 5.4 \times 0.1 + 5.0 \times 0.1 + 4.0 \times 0.06 + 0 \times 0.04$$
$$= 5.48(\text{元})$$

例 3.5.3　设随机变量 X 服从两点分布，其概率分布为：

$$P(X=1)=p,\quad P(X=0)=1-p\quad (0<p<1)$$

求 X 的数学期望.

解　由离散型随机变量的数学期望可知

$$E(X)=1\times p+0\times(1-p)=p.$$

例 3.5.4 设随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$，求 X 的数学期望.

解 由于 $X \sim B(n,P)$，其概率分布为

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n \quad (0 < p < 1),$$

则

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(\xi = k) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i} p^{i} (1-p)^{(n-1)-i} \\ &= np(p + (1-p))^{n-1} = np. \end{aligned}$$

所以

$$E(X) = np.$$

3.5.3 连续型随机变量的数学期望

由于连续型随机变量的取值范围是某个实数区间,因此连续型随机变量的数学期望与离散型随机变量的数学期望的定义稍有不同.

定义 设连续型随机变量 ξ 的密度函数为 $p(x)$,若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x$ 为 ξ 的数学期望,记为 $E(\xi)$ 或 $E\xi$,即

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x.$$

例 3.5.5 已知连续型随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 X 的数学期望.

解

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x6x(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (6x^2-6x^3)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(2x^3-\frac{3}{2}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 3.5.6 设连续型随机变量 ξ 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 ξ 的数学期望.

解 由公式可得

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x=0.$$

例 3.5.7 设随机变量 X 服从均匀分布 $U(a,b)$，求 X 的数学期望.

解 由于 $X \sim U[a,b]$，$(a<b)$，其密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b x \frac{1}{b-a} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(a+b).$$

所以

$$E(\xi) = \frac{1}{2}(a+b),$$

即数学期望位于区间的中点.

例 3.5.8 设随机变量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求 X 的数学期望.

解 由于 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其密度函数为(图 3.32)

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\quad(\sigma>0,-\infty<\mu<+\infty),$$

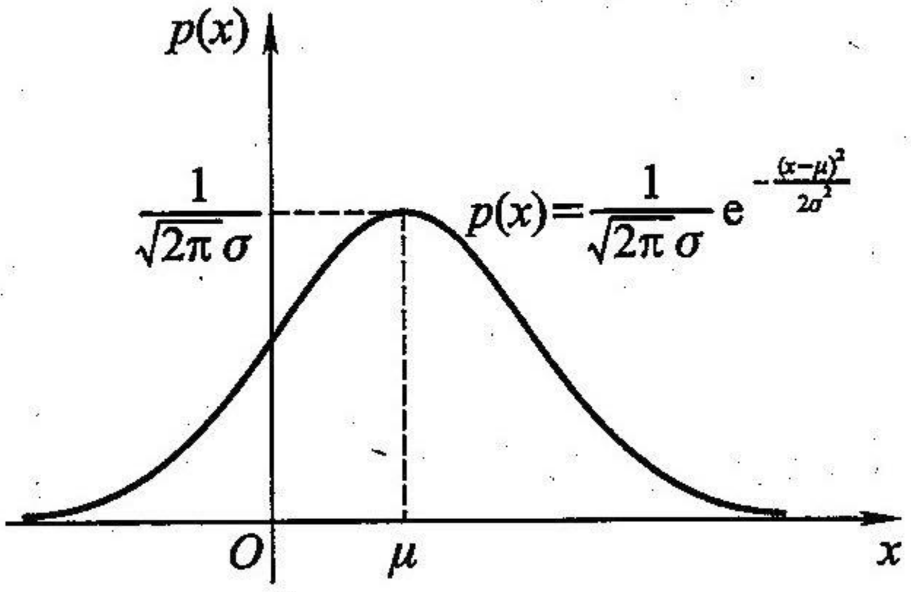

图 3.32

则
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\mathrm{d}x.$$

令 $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$,得

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(t\sigma+\mu)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$
$$=\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$
$$=\mu\cdot 1+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot 0=\mu.$$

所以

$$E(X)=\mu.$$

注 上面推导过程中，用到积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$. 事实上，此处被积函数是标准正态分布的密度函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

显然，正态分布的参数 μ 恰好是该分布的数学期望.

例 3.5.9 已知连续型随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\alpha+\beta x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

又 $E(X)=\dfrac{3}{5}$. 试求待定系数 α 和 β.

解 由密度函数性质 1 知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x=1,\quad \text{即}$$

$$\int_0^1(\alpha+\beta x^2)\mathrm{d}x=\alpha+\frac{\beta}{3}=1, \tag{①}$$

而由数学期望定义公式得

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{5},\quad \text{即}$$

$$\int_0^1x(\alpha+\beta x^2)\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{4}=\frac{3}{5}. \tag{②}$$

由①,②得

$$\alpha=\frac{3}{5},\quad \beta=\frac{6}{5}.$$

3.5.4 数学期望的基本性质

利用数学期望的定义可以证明，数学期望具有如下基本性质：

设 ξ,η 为随机变量，且 $E(\xi)$、$E(\eta)$ 都存在，a、b、c 为常数，则

性质 1 $E(c)=c$;

性质 2 $E(a\xi+b)=aE(\xi)+b$;

性质 3 $E(\xi+\eta)=E(\xi)+E(\eta)$.

性质 3 可以推广到有限多个随机变量的情形：

若 $\xi_1,\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是随机变量，且 $E\xi_k$ 存在，$k=1,2,\cdots,n$ 则

$$E(\xi_1+\cdots+\xi_n)=\sum_{k=1}^{n}E\xi_k.$$

例 3.5.10 设随机变量 X 的概率分布为

$$P(X = k) = 0.2, \quad k = 1,2,3,4,5,$$

求 $E(X)$，$E(3X+2)$.

解 因为 $P(X=k)=0.2$，$k=1,2,3,4,5$，所以由离散型随机变量的数学期望的定义可知

$$E(X) = 1\times 0.2 + 2\times 0.2 + 3\times 0.2 + 4\times 0.2 + 5\times 0.2 = 3,$$

$$E(3X+2) = 3E(X) + 2 = 11.$$

例 3.5.11 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0,\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $E(X)$, $E(2X-1)$.

解 由连续型随机变量的数学期望的定义可知

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^{0}x(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x(1-x)\mathrm{d}x\\&=-1/6+1/6=0.\end{aligned}$$

故

$$E(2X-1)=2E(X)-1=-1.$$

设随机变量X的概率分布为$X\sim\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1\\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.4\end{pmatrix}$，则$E(2X+1)=$

设随机变量 X 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1\\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.4\end{pmatrix}$，则 $E(2X+1)=\underline{\ 0.4\ }$

对任意随机变量 X，若 $E(X)$ 存在，则 $E[E(EX)]$ 等于__

对任意随机变量X，若$E(X)$存在，则$E[E(EX)]$等于__<u>EX</u>__

若连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} a(1+x) & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，

求（1）常数 a 的值；（2）$P\{X \le 1\}$；（3）$E(2X-1)$

若连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} a(1+x) & 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，

求（1）常数 a 的值；（2）$P\{X\le 1\}$；（3）$E(2X-1)$.

解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^2 a(1+x)dx=a(x+\frac{x^2}{2})\big|_0^2=1$，得 $a=\frac{1}{4}$.

（2）$P\{X\le 1\}=\int_0^1 \frac{1}{4}(1+x)dx=\frac{3}{8}$.

（3）因 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^2 \frac{1}{4}x(1+x)dx=\frac{7}{6}$，

故 $E(2X-1)=2E(X)-1=\frac{4}{3}$.

甲、乙两人从装有 2 个白球与 3 个黑球的口袋中轮流摸取一球，甲先取，乙后取，每次取后不放回，直到两人中有 1 人取到白球时停止，

试求：（1） 取球次数 X 的概率分布；

（2） 甲先取到白球的概率；

（3） $E(-3X+2)$。

解：（1）$P(X=1)=\frac{2}{5}=0.4$，　　$P(X=2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=0.3$，

$P(X=3)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=0.2$，　$P(X=4)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=0.1$。

（2）设 A 为“甲先取到白球”事件，则

$$P(A)=P(X=1)+P(X=3)=0.4+0.2=0.6$$。

（3）$EX=1\times0.4+2\times0.3+3\times0.2+4\times0.1=2$，

$E(-3X+2)=-3EX+2=-4$。

3.5.5 随机变量的方差的概念

数学期望在一定意义下,表示了随机变量的平均取值. 在许多实际问题中,我们不仅关心其平均取值,而且还关心其取值与平均取值的偏离程度. 当一个随机变量取值时,有的值密集在它的数学期望周围,有的则比较分散. 为了区别这些不同的情况,需要定义一个刻画随机变量取值分散程度的数,即方差的概念.

定义 设随机变量 ξ,若 $E(\xi-E(\xi))^2$ 存在,则称它为随机变量 ξ 的**方差**,记为 $D(\xi)$,即

$$D(\xi)=E(\xi-E(\xi))^2,$$

而 $\sigma(\xi)=\sqrt{D\xi}$ 称为 ξ 的**标准差**或**根方差**.

显然随机变量的方差总是一个非负数,从定义可知它描述了随机变量对于其数学期望的离散程度(平均离散程度). 当随机变量的可能值密集在数学期望的附近时,方差较小;反之,方差较大.

对于随机变量方差的计算,有如下简化公式:

$$
\begin{aligned}
D(\xi) &= E(\xi - E(\xi))^2 \\
&= E(\xi^2 - 2\xi E(\xi) + (E\xi)^2) \\
&= E(\xi^2) - (E(\xi))^2,
\end{aligned}
$$

即

$$D(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2.$$

3.5.6 离散型随机变量的方差

由方差的定义可以得到离散型随机变量方差的公式.

离散型随机变量方差的公式　若 ξ 是离散型随机变量,并且其概率分布为

$$P(\xi = x_k) = p_k \quad (k = 1,2,\cdots),$$

如果其方差存在,则

$$D(\xi) = \sum_k (x_k - E(\xi))^2 p_k.$$

简化公式　$D(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2$

其中

$$E(\xi) = \sum_k x_k p_k,$$

$$E(\xi^2) = \sum_k x_k^2 p_k.$$

例 3.5.12 从装有6个红球与4个白球的袋中任意取出3个球,求其中红球数的方差与标准差.

解 设从袋中任取3个球,其中的红球数用随机变量 X 表示.

显然 X 的可能取值为 0,1,2,3,且

$$P(X=i)=\frac{C_6^i\cdot C_4^{3-i}}{C_{10}^3},\quad i=0,1,2,3.$$

由离散型随机变量的数学期望的定义

$$E(X) = \sum_{i=0}^{3} iP(X = i) = 0 \times \frac{4}{120} + 1 \times \frac{36}{120} + 2 \times \frac{60}{120} + 3 \times \frac{20}{120} = 1.8.$$

所以 $$D(X) = \sum_{i=0}^{3} (i - E(X))^2 P(X = i)$$

$$= (-1.8)^2 \times \frac{4}{120} + (1 - 1.8)^2 \times \frac{36}{120} + (2 - 1.8)^2 \times \frac{60}{120} +$$

$$(3 - 1.8)^2 \times \frac{20}{120} = 0.56.$$

或用简化公式计算 $D(X)$：

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{3} i^2 P(X = i) = 0 \times \frac{4}{120} + 1^2 \times \frac{36}{120} + 2^2 \times \frac{60}{120} + 3^2 \times \frac{20}{120} = 3.8,$$

所以 $$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0.56.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0.56} \approx 0.7483.$$

例 3.5.13 设随机变量 X 服从两点分布(0－1),求 X 的方差.

解 由于 $X\sim(0-1)$,则其概率分布为

$$P(X=1)=p,\quad P(X=0)=1-p=q\quad(0<p<1).$$

$$E(X)=p,\quad E(X^2)=1^2\times p+0^2\times(1-p)=p,$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=p-p^2=pq.$$

例 3.5.14 设随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$，求 X 的方差

解 由于 $X \sim B(n,p)$，则其概率分布为

$$P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n\quad(0<p<1).$$

$$E(X)=np,$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}kn\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k}\quad(\text{此处运用组合数公式 } k\mathrm{C}_n^k=n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1})$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}(k-1)\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}+np\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{i=0}^{n-1}i\mathrm{C}_{n-1}^{i}p^{i}(1-p)^{(n-1)-i}+np\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{i}p^{i}(1-p)^{(n-1)-i}$$

（运用二项分布的数学期望公式知 $\sum_{i=0}^{n-1}i\mathrm{C}_{n-1}^{i}p^{i}(1-p)^{(n-1)-i}=(n-1)p$），

$$E(X^2)=np(n-1)p+np,$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=np(1-p).$$

3.5.7 连续型随机变量的方差

由方差的定义,可以得到连续型随机变量的方差的公式.

连续型随机变量的方差的公式　若 ξ 是连续型随机变量,其密度函数为 $p(x)$,如果随机变量 ξ 的方差存在,则

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(\xi))^2 p(x)\,\mathrm{d}x.$$

简化公式

$$D(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2$$

其中

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 3.5.15 设随机变量 X 具有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $E(X)$,$D(X)$.

解 因为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2 x(2-x)\mathrm{d}x=1,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{7}{6},$$

所以根据公式 $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$$=\frac{7}{6}-1^2=\frac{1}{6}.$$

例 3.5.16 设随机变量 X 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布,求 X 的方差.

解 因为 $X \sim U[a,b]\ (a<b)$,其密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{(a+b)}{2},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2),$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

例 3.5.17 设随机变量 X 服 从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,求 X 的方差.

解 因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\quad(\sigma>0,\ -\infty<\mu<+\infty).$$

$$E(X)=\mu,$$

$$\begin{aligned}D(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2p(x)\,dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\qquad(\text{令 } t=(x-\mu)/\sigma)\\&=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\\&=\sigma^2,\end{aligned}$$

所以 $$D(X)=\sigma^2.$$

对一些在统计中常用的且重要的离散型随机变量与连续型随机变量的数学期望与方差列表如下：

随机变量服从的分布	概率分布（密度函数）	数学期望	方差
两点分布	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{bmatrix}$ $p+q=1$	p	pq
二项分布 $B(n,p)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix}$ 其中 $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\cdots,n$	np	npq
均匀分布 $U[a,b]$	$p(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$(a+b)/2$	$(a-b)^2/12$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

设随机变量 X 服从均匀分布 U[0, a], 其方差与数学期望之比为 1/2，则

该分布的参数 a=

设随机变量 X 服从均匀分布 U[0, a], 其方差与数学期望之比为 1/2，则

该分布的参数 a=__3__.

设随机变量 X 表示 10 次独立重复射击中命中目标的次数，且每次击中目标的概率为 0.4，则 $E(X^2)=$

设随机变量 X 表示 10 次独立重复射击中命中目标的次数，且每次击中目标的概率为 0.4，则 $E(X^2)=$ _18.4_.

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

设事件 $A=\{X\le \frac{1}{2}\}$，并以 Y 表示在三次独立重复地试验中 A 出现的次数，

试求：（1）常数 a；（2）$P(Y=1)$；（3）$D(Y)$

解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 axdx = \frac{a}{2} = 1, \therefore a = 2.$

（2）$P(A) = P(X \le \frac{1}{2}) = \int_0^{1/2} axdx = \frac{1}{4}$，

$Y \sim B(3, \frac{1}{4})$，$P(Y = 1) = C_3^1 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{4})^2 = \frac{27}{64}$，

（3）$D(Y) = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$。

盒中装有 5 个球，其标号为 1，2，3，4，5，从中任取 3 球，X 表示

取得球中最大号码数，求（1）X 的概率分布；（2）$E(X)$；（3）$D(X)$

解：（1）X的可能取值为3，4，5，且

$$P(X=3)=\frac{C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{10},\quad P(X=4)=\frac{C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10},\quad P(X=5)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{10};$$

（2）$E(X)=\frac{1}{10}\times 3+\frac{3}{10}\times 4+\frac{6}{10}\times 5=\frac{9}{2};$

（3）$E(X^2)=\frac{207}{10}$　　$DX=E(X^2)-(EX)^2=0.45$

3.5.8 方差的基本性质

由方差的定义,可以得到方差的基本性质(假定所遇到的方差都存在,其中 c,k 为常数).

性质 1 $D(c)=0$;

性质 2 $D(c\xi)=c^2D(\xi)$;

特别地,当 $c=-1$ 时 $D(-\xi)=D(\xi)$;

性质 3 $D(\xi+c)=D(\xi)$;

性质 4 $D(k\xi+c)=k^2D(\xi)$.

例 3.5.18 设离散型随机变量 X 具有概率分布列

X	-2	-1	0	1	2	3
$P(X=x_k)$	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1

试求 $E(X)$, $D(X)$, $D(2X+3)$.

解 由离散型随机变量的数学期望的定义得

$$E(X)=(-2)\times 0.1+(-1)\times 0.2+0\times 0.2+1\times 0.3+2\times 0.1+3\times 0.1 =0.4,$$

$$E(X^2)=(-2)^2\times 0.1+(-1)^2\times 0.2+0^2\times 0.2+1^2\times 0.3+2^2\times 0.1+3^2\times 0.1 =2.2.$$

再由方差计算公式得

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=2.2-0.4^2=2.04.$$

$$D(2X+3)=4D(X)=4\times 2.04=8.16.$$

例 3.5.19 设连续型随机变量具有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & 0<x<1,\\ Ae^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

求：(1) 常数 A；(2) $D(-X-2)$.

解 (1) 根据密度函数的性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1,$$

所以
$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} Ae^{-x}\,\mathrm{d}x=1,$$

计算上述积分,可得 $A=\dfrac{e}{2}$.

(2) 要求方差,首先要求数学期望.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{11}{4},$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=11/4-16/9=\frac{35}{36},$$

$$D(-X-2)=D(X)=\frac{35}{36}.$$

若 $X \sim B(10, 0.2)$, 则 $D(3X-1)=$

若 $X \sim B(10, 0.2)$，则 $D(3X-1)=$__14.4__