文科概率统计

3.3 条件概率及全概率公式

3.3.1 条件概率

3.3.1 条件概率

在实际问题中，除了要知道事件 A 的概率 $P(A)$ 外，有时还需要知道在事件 B 已发生的条件下，事件 A 发生的概率，这就是我们所要讲的条件概率，将它记为 $P(A|B)$.

我们先通过一个例子来引入条件概率的概念. 掷一颗骰子，观察其出现点数，令事件 A 表示"出现点数小于 4"，则 $P(A)=1/2$，如果已知事件 B 表示"出现偶数点"，且 B 已发生，这时只剩下三种可能，即"2 点"，"4 点"或"6 点". 从而在 B 已发生的条件下，A 发生的概率为 $P(A|B)=1/3$，注意 $P(B)=1/2$，$P(AB)=1/6$，此时有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\neq P(A).$$

定义 设 A、B 是随机试验 E 的两个事件，且 $P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生条件下事件 A 发生的**条件概率**.

由条件概率的定义可以知道，计算条件概率 $P(A|B)$ 有两种方法：

(1) 样本空间 Ω 中，先计算 $P(AB)$、$P(B)$，然后由定义公式求得 $P(A|B)$.

(2) 在样本空间 Ω 的缩减后的样本空间 Ω_B（事件 B 发生时的样本空间）（图 3.19）上计算 A 发生的（无条件）概率，就可以得到 $P(A|B)$.

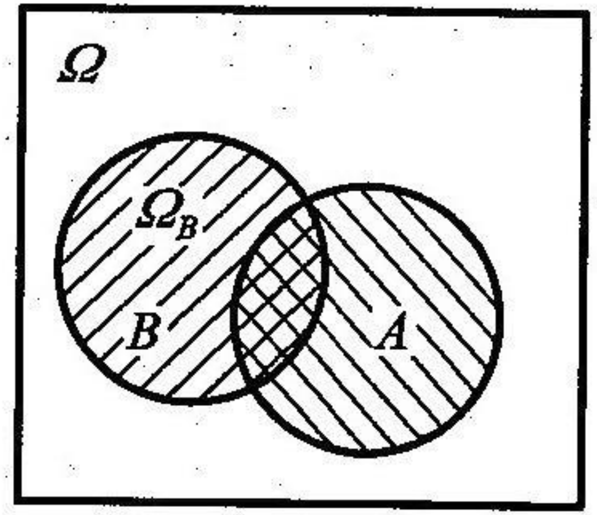

图 3.19

例 3.3.1 全年级100名学生中，有男生(以事件 A 表示)80 人，女生 20 人；来自北京的(以事件 B 表示)有 20 人，其中男生 12 人，女生 8 人；免修英语的(用事件 C 表示)40 人中有 32 名男生，8 名女生. 试写出 $P(A)$、$P(B)$、$P(B|A)$、$P(A|B)$、$P(AB)$、$P(C)$、$P(C|A)$、$P(\bar{A}|\bar{B})$、$P(AC)$.

解 根据题意有

$$P(A)=\frac{80}{100}=0.8;\qquad P(B)=\frac{20}{100}=0.2;$$

$$P(B|A)=\frac{12}{80}=0.15;$$

$$P(A|B)=\frac{12}{20}=0.6;$$

$$P(AB)=\frac{12}{100}=0.12;\qquad P(C)=\frac{40}{100}=0.4;$$

$$P(C|A)=\frac{32}{80}=0.4;$$

$$P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{12}{80}=0.15;$$

$$P(AC)=\frac{32}{100}=0.32.$$

3.3.2 概率的乘法定理

3.3.2 概率的乘法定理

由前面的条件概率的定义公式,可得到下面概率的乘法定理.

定理 3.3.1 设 A、B 为随机试验 E 中的两个事件,且 $P(B)>0$,则有

$$P(AB)=P(A|B)P(B).$$

这个公式称为**概率的乘法公式**. 同样地,概率的乘法公式还有另一种形式:若 $P(A)>0$,

$$P(AB)=P(B|A)P(A).$$

例 3.3.2 设在一盒子中装有4个蓝色球和 6 个红色球，取球两次，一次取 1 个，取后不放回，问两次都取到红球的概率是多少？

解 设事件 A =“第一次取到红球”，事件 B =“第二次取到红球”.

因为 $P(A)=\frac{6}{10}, P(B \mid A)=\frac{5}{9}$,

所以 $P(AB)=P(B \mid A)P(A)=\frac{1}{3}$.

我们还可以将概率的乘法公式推广到三个事件的情形：

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2).$$

例 3.3.3 设在一盒子中装有 4 个蓝色球和 6 个红色球，取球三次，一次取 1 个，取后不放回，问三次都取到红色球的概率是多少？

解 设事件 A =“第一次取到红球”，

事件 B =“第二次取到红球”，

事件 C =“第三次取到红球”.

由已知条件：$P(A)=\frac{6}{10}$，$P(B|A)=\frac{5}{9}$，$P(C|AB)=\frac{4}{8}$，因此由概率的乘法公式可知：

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{6}.$$

例 3.3.4 设某校学生四级英语考试的通过率为 98% ,其中 70% 通过六级考试,求该校学生六级英语考试的通过率.

解 设事件 A =“任选一学生,其通过四级考试”,

事件 B =“任选一学生,其通过六级考试”.

显然 $B\subset A, AB=B$. 且 $P(A)=0.98, P(B|A)=0.7$,

所以 $P(B)=P(AB)=P(B|A)P(A)=0.686$.

例 3.3.5 设 A,B 是两个事件，已知 $P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{6}$，求$P(\bar{A}|\bar{B})$.

解 由已知条件可知

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=\frac{1}{18},$$

而
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{11}{18},$$

故
$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=\frac{7}{18}.$$

因此
$$P(\bar{A}\mid\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(\bar{A}\cdot\bar{B})}{1-P(B)}=\frac{7}{12}.$$

3.3.3 事件的独立性

3.3.3 事件的独立性

前面讨论了条件概率 $P(A|B)$，一般说来 $P(A|B)\neq P(A)$，即事件 B 的发生对事件 A 发生的概率是有影响的. 但当 $P(A|B)=P(A)$，即 B 的发生对 A 发生没有影响，此时即说事件 A 独立于事件 B，此时由概率乘法定理得到 $P(AB)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B)$. 由此可以给出两个事件独立的定义.

定义 设 A、B 是试验 E 的两个事件，若有

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件 A、B 为**相互独立的事件**.

由概率乘法定理，容易得出：当事件 A 独立于事件 B 时，事件 B 也独立于事件 A，即独立是一个对称性概念.

定理 3.3.2 设 A、B 是试验 E 的两个事件，且有 $P(B)>0$，则 A 与 B 相互独立的充分必要条件为

$$P(A|B)=P(A).$$

例 3.3.6 试证 A、B 相互独立与以下每一条件等价：

(1) 事件 A 与 $\bar{B}$ 独立；(2) 事件 $\bar{A}$ 与 B 独立；(3) 事件 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 独立.

证 我们在这里只证由 A 和 B 相互独立，推出 A 与 $\bar{B}$ 独立，对于其他情形，由两个事件独立的对称性，同样可以推出.

若 A 与 B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$. 由概率的性质，得到：

$$
\begin{aligned}
P(A\bar{B}) &= P(A-AB) = P(A) - P(AB) \\
&= P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1-P(B)) \\
&= P(A)P(\bar{B}).
\end{aligned}
$$

故 A 与 $\bar{B}$ 相互独立.

例 3.3.7 甲、乙两人同时射击某一目标. 设甲击中目标的概率为0.8,乙击中目标的概率为 0.5,求(1) 两人同时击中目标的概率;(2) 目标被击中的概率;(3) 甲、乙两人恰有一人击中目标的概率.

解 设事件 A =“甲击中目标”,

事件 B =“乙击中目标”,

事件 C =“目标被击中”,

从题意可知: $C=A+B$,且

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

由于甲、乙射击是相互独立的,因此可以认为甲、乙互不干扰,从而 A 与 B 是相互独立的.

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.8\times 0.5=0.4,$$

所以 $P(C)=0.8+0.5-0.4=0.9.$

甲、乙两人恰有一人击中目标即为 $A\bar{B}+\bar{A}B.$

又 $A\bar{B}$ 与 $\bar{A}B$ 互斥,且 A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 B 相互独立

故 $P(A\bar{B}+\bar{A}B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)$

$$=P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A})P(B)=0.5$$

类似于两个事件的独立性,可以凭借实际问题的含义判断几个事件的相互独立性.如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立,则

(1) $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$;

(2) $P(A_1+\cdots+A_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$.

独立性概念的引入对积事件的概率计算带来了很大的方便.

例 3.3.8 甲、乙、丙三人独立地翻译一篇文章.甲能正确译出的概率为0.45,乙能正确译出的概率为0.55,丙能正确译出的概率为0.4.问此文章能被正确译出的概率.

解 设 A_1="甲能正确译出此文",

A_2="乙能正确译出此文",

A_3="丙能正确译出此文".

A_1、A_2,A_3相互独立

$$P(A_1)=0.45,P(A_2)=0.55,P(A_3)=0.4.$$

故
$$P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)$$
$$=1-0.55\times0.45\times0.6=0.8515$$

设甲、乙、丙三射手相互独立地对同一目标射击一次，其中甲击中目标的概率为 0.8，乙击中目标的概率为 0.7，丙击中目标的概率为 0.9.试求

（1）求甲、乙、丙三人同时击中目标的概率；

（2）目标不被击中的概率；

（3）甲、乙、丙三人至少有一人击中目标的概率；

（4）甲、乙、丙三人中只有一人击中目标的概率.

解：分别用 A, B, C 表示甲、乙、丙击中目标的事件，则

$$P(A)=0.8, P(B)=0.7, P(C)=0.9,$$

（1） $p_1=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0.8\times 0.7\times 0.9=0.504.$

（2） $p_2=P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=0.2\times 0.3\times 0.1=0.006.$

（3） $p_3=1-p_2=0.994.$

（4） $p_4=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)$

$$=0.8\times 0.3\times 0.1+0.2\times 0.7\times 0.1+0.2\times 0.3\times 0.9$$

$$=0.092.$$

3.3.4 伯努利概型

3.3.4 伯努利概型

前面我们学习了多个事件的独立性，下面要介绍一类特殊的试验——伯努利(Bernoulli, Jacob[瑞士], 1654—1705)试验.

定义 只有两种结果 A 与 $\bar{A}$ 的试验，称为伯努利试验.

定义 如果在相同的条件下独立地作 n 次伯努利试验(即各次试验的结果互不影响)，事件 A 在每次试验中发生的概率保持不变，这时称这种试验为 **n 重伯努利试验**.

n 重伯努利试验是一种非常重要的概率模型，许多实际问题都可归结为这种模型，通常称它为**伯努利概型**. 它与古典概型的重要区别在于，它的样本点不一定是等概率的，它常用来讨论 n 次重复试验中事件 A 发生的次数及其概率.

定理 3.3.3（伯努利定理）　设伯努利试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则在 n 重伯努利试验中事件 A 恰发生 m 次的概率为

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \qquad (m = 0,1,2,\cdots,n).$$

例如在 7 次试验中，由于各次试验都是相互独立的，事件 A 在某 3 次发生而在其余 4 次不发生这个事件的概率为 $p^3(1-p)^4$，事件 A 可以在 7 次试验中的任何 3 次发生，因此共有 C_7^3 种不同的方式，而在每种方式下的事件是互不相容的，由概率的可加性可以知道，在 7 重伯努利试验中事件 A 恰发生 3 次的概率为

$$P_7(3) = C_7^3 p^3 (1-p)^{7-3}.$$

例 3.3.9 一批产品的废品率为0.1. 现作三次有放回抽样,每次一件. 求三次中恰有两次取到废品的概率.

解 对于每一件产品来说,它只有两种可能,即废品或正品. 现作三次有放回抽样,每次一件,显然这是一个三重伯努利试验问题,此时 $p=0.1$, $q=1-p=0.9$. 因此三次中恰有两次取到废品的概率是:

$$P_3(2)=C_3^2p^2(1-p)^{3-2}=3\times0.1^2\times0.9=0.027.$$

例 3.3.10　假定一种药物对某疾病的治愈率为 $p=0.8$，现给 10 名患者同时服用此药，求其中至少有 5 人治愈的概率.

解　由于各个患者服药后是否痊愈是相互独立的，故这是 $n=10,p=0.8$ 的伯努利概型.

设 A 表示"10 人中至少有 5 人治愈".

故
$$P(A)=\sum_{k=5}^{10}P_{10}(k)=\sum_{k=5}^{10}C_{10}^{k}(0.8)^{k}(0.2)^{10-k}$$
$$\approx 0.994.$$

3.3.5 全概率公式

3.3.5 全概率公式

前面我们学习了条件概率和概率乘法定理，下面介绍一个重要的公式——全概率公式.

定理 3.3.4（全概率定理） 如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组，且 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则对任一事件 B，有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i).$$

这个公式称为**全概率公式**.

证 $A_1, A_2, \cdots, A_n$是一个完备事件组，从而$A_i(i=1,2,\cdots,n)$是两两互不相容的，且$P(A_i)>0$. 由于 B 被分成 n 个部分$A_iB(i=1,2,\cdots,n)$之和，且$A_iB(i=1,2,\cdots,n)$也是两两互不相容的(图 3.23)，于是

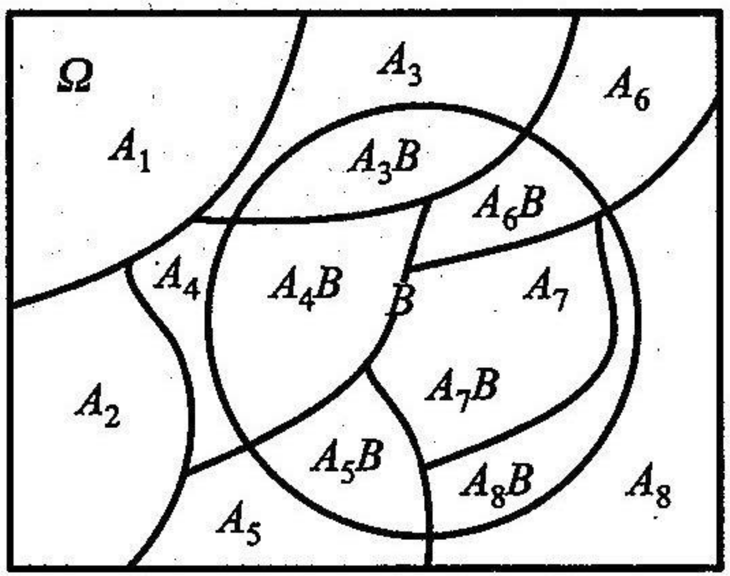

图 3.23

$$B = B\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_iB.$$

由概率的可加性及概率乘法定理得到

$$P(B) = P\left(\sum_{i=1}^{n} A_iB\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_iB)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i).$$

全概率公式应用较广，它的基本思路是将一个比较复杂的事件分解成若干个较简单且两两互不相容事件的和，即要找一个完备事件组，然后利用概率的可加性及概率乘法定理来计算.

例 3.3.12 某厂有甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，其产量分别占总产量的 25%、35%、40%．各自的废品率为 5%、4%、2%，今从总产品中任取一件，求所取出的产品为废品的概率.

解 设A_1 =“所取产品为甲车间生产的”；

A_2 =“所取产品为乙车间生产的”；

A_3 =“所取产品为丙车间生产的”；

B =“所取产品为废品”.

则 $A_i(i=1,2,3)$构成一个完备事件组，且

$$P(A_1)=0.25,\quad P(A_2)=0.35,\quad P(A_3)=0.4,$$

$$P(B\mid A_1)=0.05,\quad P(B\mid A_2)=0.04,\quad P(B\mid A_3)=0.02,$$

由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

$$=0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.4\times0.02=0.0345.$$

袋中有 8 个球，其中 6 个红色球，2 个黑色球，从中连续抽取两次每次取一球，作不放回抽样. A_i (i=1, 2)表示第 i 次抽到红色球，求

（1） $P(A_1)$;(2) $P(A_1\overline{A}_2)$; (3) $P(A_2)$.

解：（1）$P(A_1)=\frac{6}{8}$；

（2）$P(A_1\overline{A}_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)=\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{14}$

(3) $P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{3}{4}$.

3.3.6 贝叶斯公式

3.3.6 贝叶斯公式

前面介绍了条件概率及全概率公式，由此可导出一个重要公式——贝叶斯公式.

定理 3.3.5(贝叶斯(Bayes T.[英],1702—1763)定理) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成完备事件组，且 $P(A_i)>0,(i=1,2,\cdots,n)$，则对任一事件 $B(P(B)>0)$ 有

$$P(A_k \mid B)=\frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

上式称为**贝叶斯公式**(图 3.24).

证 因为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成完备事件组，由概率乘法公式可得

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_kB)}{P(B)}$$

且
$$P(A_kB) = P(A_k)P(B \mid A_k).$$

而由全概率公式可知 $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$，由此可以得到

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_kB)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

贝叶斯公式通常用在下列问题中：已知事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为事件 B 发生的原因，即 $P(B \mid A_k)$，现在 B 已经发生了，反过来要讨论 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中哪一个是导致 B 发生的真正“原因”即求 $P(A_k \mid B)$.

例 3.3.14 某人从甲地至乙地开会，乘火车去的概率是3/10，乘船、汽车或飞机去的概率分别为 1/5、1/10、2/5. 如果乘火车去，迟到的概率是 1/4；如果乘船或汽车，迟到的概率分别为 1/3，1/12；如果乘飞机便不会迟到. 结果他迟到了，试问在此条件下，他是乘火车去的概率为多少？

解 设事件 A 表示“开会迟到”，B_1、B_2、B_3、B_4分别表示“乘火车”、“乘船”、“乘汽车”、“乘飞机”这四个事件.

显然 B_1、B_2、B_3、B_4构成一个完备事件组，A 与 B_1、B_2、B_3、B_4有关，由已知

$$P(B_1)=3/10, P(B_2)=1/5,$$

$$P(B_3)=1/10, P(B_4)=2/5,$$

$$P(A \mid B_1)=1/4, P(A \mid B_2)=1/3,$$

$$P(A \mid B_3)=1/12, P(A \mid B_4)=0.$$

于是所求概率即为 $P(B_1 \mid A)$，由贝叶斯公式：

$$P(B_1 \mid A)=\frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

$$=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{12}+\frac{2}{5}\times 0}=\frac{1}{2}.$$

例 3.3.15 在肝癌诊断中有一种血清蛋白法. 用 B 表示事件"被检验者患有肝癌",用 A 表示事件"用该法判断被检验者患有肝癌",已知 $P(A|B)=0.95$(即此方法能够检查出 95% 的真实患者),$P(A|\bar{B})=0.1$(即可能将 10% 的正常人误判),又根据以往记录,每一万人中约有 4 人患有肝癌,即 $P(B)=0.0004$,现有一人不幸被该检验法诊断为患有肝癌,试求此人确实是肝癌患者的概率(即 $P(B|A)$).

解 由贝叶斯公式

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

$$=\frac{0.0004\times 0.95}{0.0004\times 0.95+0.9996\times 0.1}\approx 0.0038.$$

此概率相当小. 由此可见,虽然此检验法相当可靠(能检出 95% 的真实患者),但由此被诊断为肝癌的人都可能并不真正患有肝癌,这一结果对那些被此检验法判断为肝癌的人无疑是一极大安慰.

三个箱子，第一箱中装有 4 个黑球 1 个白球，第二箱中装有 3 个黑球 2 个白球，第三箱中装有一半黑球和一半白球。现从中任取一箱，再从该箱中任取一球，

求（1）取出球是白球的概率；

（2）若已知取出的球是白球，则该球属于第一箱的概率.

解：分别用 A_1, A_2, A_3 表示从第一、二、三箱中取球，,B 表示最后取出的是白球

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}, \quad P(B\mid A_1)=\frac{1}{5}, \quad P(B\mid A_2)=\frac{2}{5}, \quad P(B\mid A_3)=\frac{1}{2}$$

（1）由全概率公式可知

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)=\frac{11}{30}$$

（2）由贝叶斯公式可知

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\frac{2}{11}.$$