文科概率统计

3.2 概率的定义

3.2.0 排列组合知识补充

网络视频

https://www.bilibili.com/video/BV1e7411J7SC

温馨提示：此视频框在点击“上传手机课件”时会进行转换，用手机进行观看时则会变为可点击的视频。此视频框可被拖动移位和修改大小

3.2.1 概率的统计定义

3.2.1 概率的统计定义

随机事件的发生具有偶然性,但不同事件发生的可能性有大小之分的.在现实社会中,人们普遍关心的是随机事件发生的可能性的大小,而随机事件发生的可能性大小在数学上的抽象就是事件的概率.

定义 如果在 n 次随机试验中,事件 A 出现了 m 次,则称比值 m/n 为 n 次试验中事件 A 出现的频率,记为 $f_n(A)$,即 $f_n(A)=m/n$.

频率具有如下性质：

设随机试验 E 的样本空间为 Ω,A、B 为 E 中的两个事件,则有

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；　　（非负性）

(2) $f_n(\Omega) = 1$；　　（规范性）

(3) 若 A、B 互不相容,即 $AB = \varnothing$,则

$$f_n(A+B) = f_n(A) + f_n(B).\text{（可加性）}$$

若 A_1、A_2、$\cdots$、A_s是 E 中两两互不相容事件,即 $A_iA_j = \varnothing (i \neq j)$ 则

$$f_n(A_1 + A_2 + \cdots + A_s) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_s).$$

历史上,有人做过成千上万次掷硬币的试验,记录如下表所示:

试验人	投掷硬币次数(n)	正面朝上次数(m)	频率(m/n)
浦　丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

当试验次数不多时,频率 $f_n(A)$ 具有随机性. 当试验次数增多时,事件 A 的频率就会呈现出稳定的趋势;而当试验次数充分大时,事件 A 的频率将在一个确定的常数附近做微小的摆动,这就是频率的稳定性.

频率具有稳定性,它揭示出了随机现象中的规律性即统计规律性.

当 n 充分大时,频率所稳定的这个常数称为随机事件的概率即统计概率.它是随机事件出现可能性大小的一个客观度量.

因此概率作为频率的稳定值,应具有频率的三条基本性质.

概率的统计定义是德国数学家冯·米泽斯(Von Mises,1883—1958)于 1919 年给出的. 概率的统计定义虽然比较直观,但在理论上不够严密.

3.2.2 古典概型概率

3.2.2 古典概型概率

通过重复试验观察事件发生的频率，不仅能了解概率的实际含义，同时也可以作为求概率近似值的一个具体方法．前面所讲的“抛硬币”、“掷骰子”的试验，它们具有下列共同的特点：

（1）试验结果的个数，即基本事件的全体是有限的．

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}.$$

（2）每一个基本事件出现的可能性相等，即

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n).$$

这时，就称所讨论的问题是**等可能概型**，有时也称为**古典概型**．

古典概型是概率论中最简单、最直观的一种类型．在等可能概型中，由于

$$1 = P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n) = nP(\omega_i),$$

所以 $$P(\omega_i) = 1/n \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

定义 若试验 E 的总的基本事件个数为 n,事件 A 由其中 m 个基本事件组成,那么事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 中所包含的基本事件数}}{\text{试验 }E\text{ 中的基本事件的总数}}.$$

这种概率称为**古典概率**,或称**先验概率**. 它把计算事件 A 的概率 $P(A)$ 的问题,化为计算事件 A 中包含的基本事件的个数 m 与总的基本事件的个数 n 的比值.

例 3.2.1 做试验 E:“将一枚均匀的硬币掷三次”,观察正、反面出现的情况.

(1) 写出 E 的样本空间;

(2) 设事件 A_1 为“恰有一次出现正面”,求 $P(A_1)$;

(3) 设事件 A_2 为“至少有一次出现正面”,求 $P(A_2)$.

解 显然，抛硬币三次，出现的正、反面共有如下八种情形.

设 H 表示出现正面，T 表示出现反面，则

（1）E 的样本空间是

$$\Omega=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}.$$

（2）“恰有一次出现正面”的事件 $A_1=\{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}$，

此时 $n=8,m=3$，故有 $P(A_1)=m/n=3/8$.

（3）“至少有一次出现正面”的事件

$$A_2=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\},$$

此时 $n=8,m=7$，故有 $P(A_2)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{7}{8}$.

例 3.2.2 设一个人的生日在一周各天是等可能的,求同一宿舍 6 人的生日不在同一天,但都在双休日的概率.

解 设事件 A 表示"6 人生日不在同一天,但都在双休日"

由于一个人的生日在一周各天是等可能的,故基本事件总数 $n=7^6$.

又 6 人生日都在双休日,但不在同一天,故事件 A 所包含的基本事件的个数为:$m=2^6-2$.

故 $$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2^6-2}{7^6}\approx 0.000\,527.$$

例 3.2.3 展览会工作人员将8只手表排成一排放入橱窗内，已知其中 3 只是同一表厂生产的，求此 3 只表恰排在一起的概率.

解 设事件 A 表示“某厂生产的 3 只表恰排在一起”.

在试验中，8 只表的每一种排列构成一个基本事件，故基本事件总数 $n=\mathrm{P}_8^8$.

当某厂 3 只表排在一起，把它们作为 1 只表与其余 5 只表一起当作 6 只表进行排列，种数为P_6^6；而放在一起的 3 只表又有左、中、右之分，为三元素的全排列，种数为P_3^3. 因此，A 所包含的基本事件个数 $m=\mathrm{P}_6^6\cdot\mathrm{P}_3^3$. 所以

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\mathrm{P}_6^6\cdot\mathrm{P}_3^3}{\mathrm{P}_8^8}=\frac{3}{28}.$$

袋 中装有 10 个号码球，分别标有 1~10 号。现从袋中任取 3 个球，
记录下其号码，求（1）最小号码为 5 的概率 （2）中间号码为 5 号的概率.

袋 中装有 10 个号码球，分别标有 1~10 号。现从袋中任取 3 个球，

记录下其号码，求（1）最小号码为 5 的概率；（2）中间号码为 5 号的概率.

解：（1）$P(A)=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{10}{120}=\dfrac{1}{12}$；

（2）$P(B)=\dfrac{C_4^1C_5^1}{C_{10}^3}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$。

3.2.3 几何概型概率

3.2.3 几何概型概率

除古典型概率之外,历史上出现最早的直接计算事件概率的方法之一是利用试验结果的均衡性,借助于几何度量确定事件的概率,习惯上称作几何概型.

定义 设试验的基本事件有无穷多个,但是可用某种几何特征(如长度、面积、体积)来表示其总和,记为 S,随机事件 A 所包含的基本事件数也可用同样的几何特征来表示,记为 s,且 s 是 S 的一部分,则随机事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{s}{S}.$$

例 3.2.5 某公共汽车站每隔 10 min 有一辆车通过,在乘客对汽车通过该站时间完全不知道的情况下,求每一个乘客到站等车时间不超过 4 min 的概率.

解 由于乘客到站时间的任意性,因此每一乘客到站时刻 t 可以看成是均匀地出现在长为 10 min 的时间区间上的一个随机点,即 $\Omega=[0,10)$. 设 $A=\{$每一个乘客等车的时间不超过 4 min$\}$,要使事件 A 发生,乘客必须在时间段$[6,10)$内到达,因此

$$S=10,\ s=4,$$

故 $$P(A)=\frac{s}{S}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

在区间$(0, 1)$内任取两个数，则事件“两数之和小于$\frac{6}{5}$”的概率为________.

在区间(0, 1)内任取两个数，则事件“两数之和小于$\frac{6}{5}$”的概率为__17/25____.

3.2.4 概率的公理化定义

定义 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的**概率**，若它满足下列条件：

公理 1 对于每一事件 A 有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$； （非负性）

公理 2 $P(\Omega)=1$； （规范性）

公理 3 对于两两互不相容的事件 $A_k(k=1,2,\cdots)$，有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

（有限可加性）

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots.$$

（可列可加性）

3.2.5 概率的性质

性质 1 设 $\bar{A}$ 是 A 的对立事件，则 $P(A)=1-P(\bar{A})$.

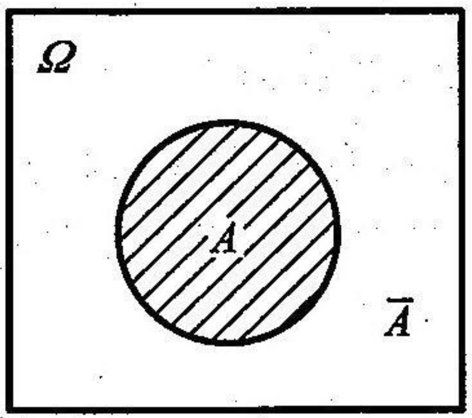

图 3.16

证 由于 $\bar{A}$ 和 A 是对立事件，有

$A+\bar{A}=\Omega, A\bar{A}=\varnothing$（图 3.16），由概率的可加性可知

$$P(\Omega)=P(A)+P(\bar{A}),$$

而 $P(\Omega)=1$，因此得到 $P(A)=1-P(\bar{A})$.

性质 2 $P(\varnothing)=0$.

证 在性质 1 中，令 $A=\varnothing, \bar{A}=\Omega$ 即可得到 $P(\varnothing)=1-P(\Omega)=0$.

性质 3　设 A、B 为两个事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

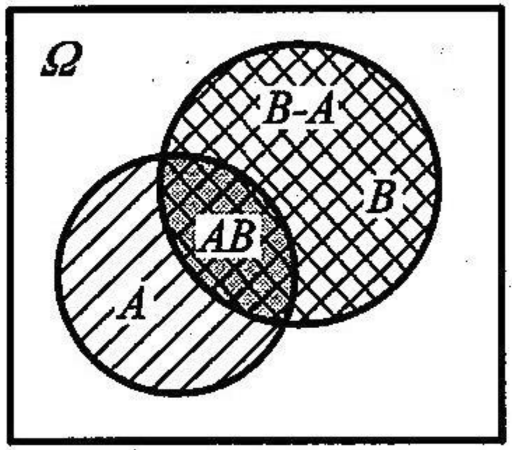

图 3.17

证　由于 $A+B=A+(B-A)$，　$B=AB+(B-A)$，

而且 $A(B-A)=\varnothing$，$(AB)(B-A)=\varnothing$（图 3.17）.

由概率的可加性得到

$$P(A+B)=P(A)+P(B-A),\quad P(B)=P(AB)+P(B-A).$$

由上述二式即可得到性质 3.

性质 3 的公式，可以推广到三个事件的情形：

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

性质 4 设 A、B 为两个事件，若 B 包含 A，即 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$.

证 因为 $B = A + (B - A)$，其中 $A(B - A) = \varnothing$，

由概率的可加性可知

$$P(B) = P(A) + P(B - A).$$

再由概率的非负性可知：$P(B - A) \geqslant 0$.

因此 $P(A) \leqslant P(B)$.

性质 5　若 B 包含 A,即 $A \subset B$(图 3.18),则

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

证　根据性质 4 的证明过程即可以得到.

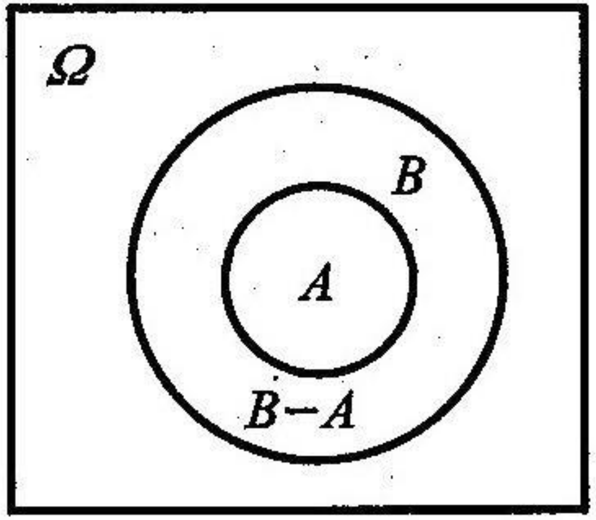

图 3.18

例 3.2.7 设某班有 50 名同学,求全班同学生日都不相同的概率(一年以 365 天计算).

解 设事件 A 表示"全班同学生日都不相同".

对于每一个同学,其生日有 365 种可能,因此 50 名同学的生日共有 365^{50} 种可能,即 $n=365^{50}$.

又 50 名同学的生日都不相同,因此事件 A 所包含的基本事件的个数 $m=\mathrm{P}_{365}^{50}$

故
$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\mathrm{P}_{365}^{50}}{365^{50}}\approx 0.029\,5,$$

例 3.2.8 袋中装有4只白球，2只红球，从袋中任取球二次，每次取1只。考虑两种情况：(一) 有放回试验方式；(二) 无放回试验方式。试在上述两种情况下，求：

(1) 取到2只球都是白球的概率；

(2) 取到2只球的颜色相同的概率；

(3) 取到2只球至少有1只是白球的概率。

解 设 A、B、C 分别表示“取到的2只球都是白球”、“取到2只球都是红球”、“取到2只球至少有1只白球”的事件。

则 $A+B$ 表示“取到2只球的颜色相同”事件。

（一）有放回试验方式

在取球后放回的情况下，第 1 次取球有 6 种可能，第 2 次取球仍有 6 种可能，所以试验的基本事件的总数 $n=6\times 6=36$.

事件 A 包含的基本事件的个数为 $m_1=4\times 4=16$.

事件 B 包含的基本事件的个数为 $m_2=2\times 2=4$.

所以
$$P(A)=m_1/n=16/36=\frac{4}{9},$$

$$P(B)=m_2/n=4/36=\frac{1}{9}.$$

由于 $AB=\varnothing$，因此 $P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{9}$；

$$P(C)=P(\bar{B})=1-P(B)=\frac{8}{9}.$$

（二）无放回试验方式

在取球后不放回的情况下，第 1 次取球有 6 种可能，第 2 次取球只有 5 种可能，所以试验的基本事件的总数 $n=6\times5=30$.

事件 A 包含基本事件的个数为 $m_1=4\times3=12$.

事件 B 包含基本事件的个数为 $m_2=2\times1=2$.

$$P(A)=m_1/n=12/30=2/5,$$

$$P(B)=m_2/n=2/30=1/15.$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=2/5+1/15=7/15;$$

$$P(C)=P(\bar{B})=1-P(B)=\frac{14}{15}.$$

例 3.2.9 设 A、B 为两个随机事件，且 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(\overline{AB})$

解 因为 $(A-B)+AB=A$，且 $(A-B)(AB)=\varnothing$

所以
$$P(A-B)+P(AB)=P(A)$$

由已知可知 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$

所以 $P(AB)=0.4$

因此 $P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6.$

设 A,B,C 构成一完备事件组，且 $P(A)=0.5$，$P(\overline{B})=0.7$，则 $P(C)=$________.

设 A,B,C 构成一完备事件组，且 $P(A)=0.5$，$P(\overline{B})=0.7$，则 $P(C)=$ <u>0.2</u>