文科概率统计

3.1 随机事件及其运算

3.1.1 随机试验的概念

2. 随机性现象

在一定的条件下，可能结果不止一个而事先无法确定的现象. 例如，抛一枚硬币，其结果可能正面向上，也可能反面向上，每次抛掷之前无法确定其结果是什么；一袋中装有红、白两种颜色的球，从袋中任取一球，其颜色有可能是红色的，也有可能是白色的，在每次取球之前无法确定其颜色；这些都是随机性现象. 概率统计就是研究随机现象数学规律的一个数学分支.

随机现象广泛地存在于客观世界各个领域，其内在规律一般可在相同条件下通过大量重复试验而获得.

定义 在概率统计中，我们把对随机现象的一次观测称为一次**随机试验**，简称**试验**.

概率论中所研究的试验具有如下特点：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的结果具有多种可能性，并且事先能明确试验的所有可能结果；

(3) 每次试验之前不能确定该次试验将出现哪一种结果.

一次试验结果的不确定性，表现了随机现象的偶然性的一面，而在大量重复试验的条件下，显现出来的统计规律性，表现了它的必然性一面，这就是随机现象的二重性——偶然性和统计必然性之间的辩证关系. 随机现象的二重性充分说明，随机现象是可以认识的. 研究随机现象是为了掌握随机现象的统计规律性.

3.1.2 随机事件的概念

3.1.2　随机事件的概念

随机试验的每个可能出现的直接结果或不可分解的结果称为基本事件或样本点，记为 ω. 全体基本事件构成的集合称为基本事件组或样本空间，记为 Ω，$\Omega=\{\omega\}$.

基本事件的特点：每次试验必然出现一个且只能出现一个基本事件.

样本空间的子集称为随机事件，简称事件，常用大写字母 A,B,C 等来表示.

一定条件下，每次试验中必然发生的事件，称为必然事件，也记为 Ω（样本空间 Ω 是其自身的最大子集，因此也是一个事件，事件 Ω 在每次试验中必定会发生，从而是必然事件）.

一定条件下，每次试验中必然不发生的事件，称为不可能事件，记为 $\varnothing$.

例 3.1.1 抛一枚骰子的试验 E 中,观察其出现点数:A_1 =“出现 1 点”,A_2 =“出现 2 点”,A_3 =“出现 3 点”,A_4 =“出现 4 点”,A_5 =“出现 5 点”,A_6 =“出现 6 点”都是基本事件;A_7 =“出现偶数点”(图 3.2),A_8 =“出现点数大于 3 点”等都是事件,但不是基本事件;A_9 =“出现点数小于 7”是必然事件,A_{10} =“出现点数大于 6”是不可能的事件. 在此试验中,$\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$.

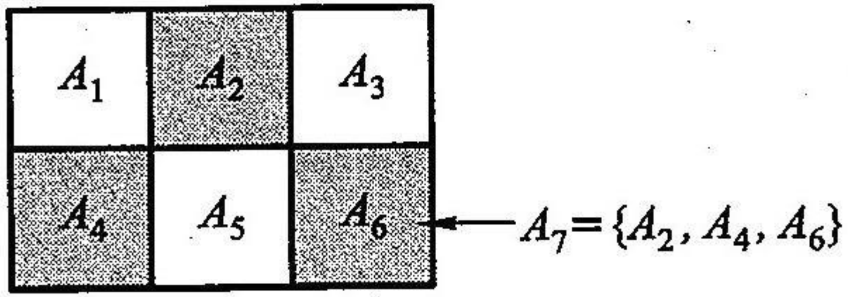


图 3.2

3.1.3 事件间的关系及运算

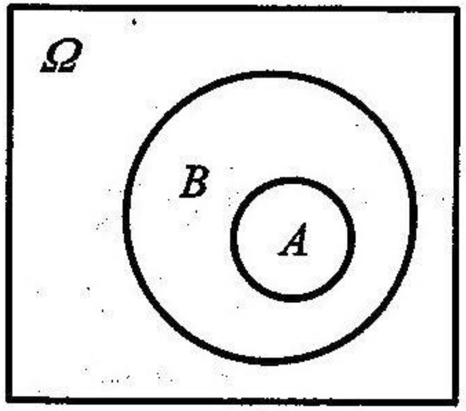
事件既然是样本空间的某种子集，所以事件的关系及运算可以类比集合的关系及运算.

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，而 A、B、$A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 E 的事件.

1. 包含与相等(集合的包含与相等)

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$(图 3.3). 特别规定：$\varnothing\subset A$，且 $A\subset\Omega$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.



$A\subset B$

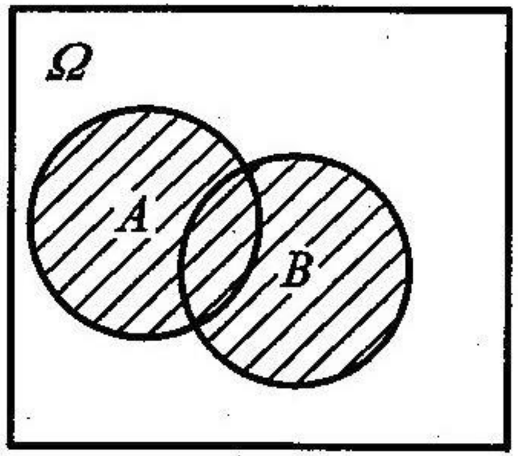
图 3.3

2. 事件的和(或并)(集合的并集)

事件 A 与事件 B 至少有一个发生所构成的事件称为事件 A 与 B 的**和事件**,也称为事件的**并**,记为 $A+B$(图 3.4).

一般的,推广到 n 个事件,事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生所构成的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 这 n 个事件的和事件(或并),记为

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i.$$



$A+B$

图 3.4

3. 事件的积(或交)(集合的交集)

事件 A 与事件 B 同时发生所构成的事件称为事件 A 与事件 B 的**积事件**,也称为事件的**交**,记为 AB(图 3.5).

一般的,推广到 n 个事件,事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生构成的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 这 n 个事件的积事件(或交),记为

$$A_1A_2\cdots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

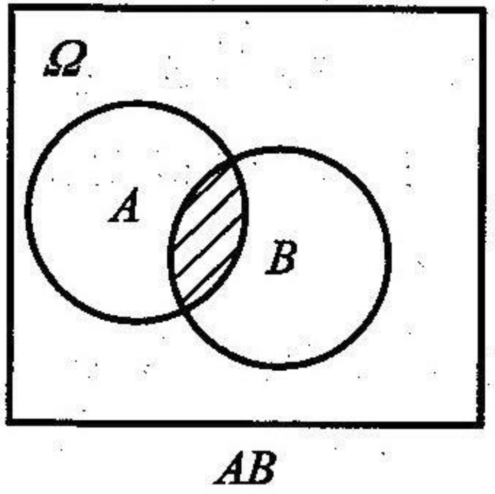
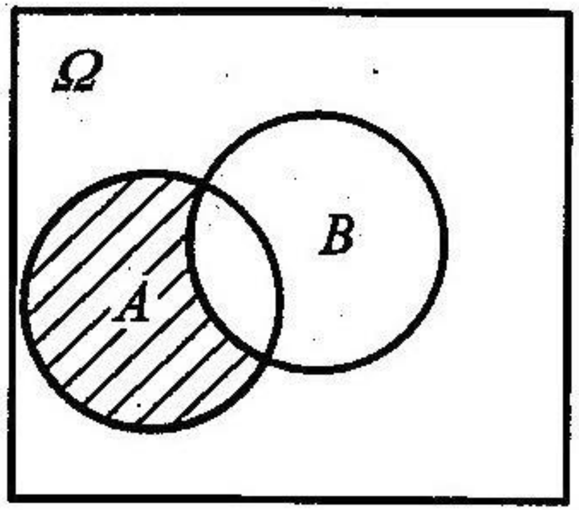


图 3.5

4. 事件的差

若事件 A 发生,而事件 B 不发生所构成的事件,称为事件 A 与事件 B 的差,记为 $A-B$(图 3.6).

显然 $A-B=A-AB, B-A=B-AB$.



$A-B$

图 3.6

5. 互不相容(互斥)事件

若事件 A 与事件 B 的积是不可能事件,即 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 两事件**互不相容**,或称**互斥事件**(图 3.7).

一般的,若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件都互不相容,那么称这 n 个事件是两两互不相容的,记为 $A_iA_j=\varnothing (i \neq j)$.

显然,随机试验 E 中的基本事件是两两互不相容的.

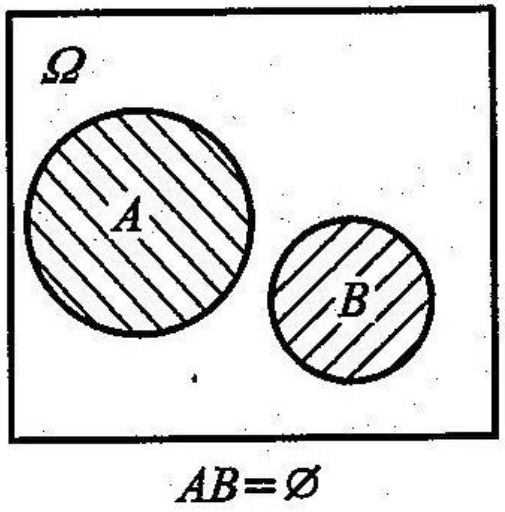


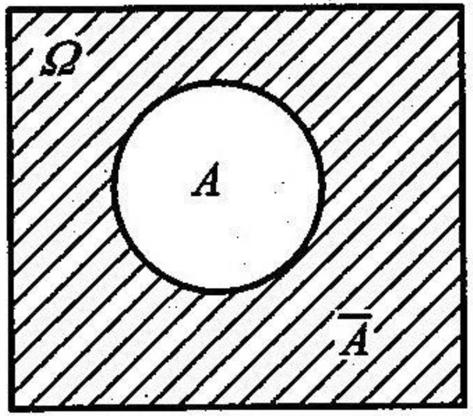
图 3.7

6. 对立(互补)事件(集合的补集)

若事件 A 与事件 B 的和事件是必然事件,即 $A+B=\Omega$,并且事件 A 与 B 的积事件是不可能事件,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 是**对立事件**,或称**互补事件**,记为 $\overline{A}=B$ 或 $\overline{B}=A$.

显然,事件 A 的补事件 $\overline{A}$ 就是从必然事件 Ω 中减去事件 A 的差事件,即 $\overline{A}=\Omega-A$(图 3.8),且 $\overline{\overline{A}}=A$,$A-B=A\overline{B}$.

由以上定义,显然可知,两个互为对立的事件一定是互不相容的,反之不一定成立.



$\overline{A}=\Omega-A$

图 3.8

7. 完备事件组

若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$为两两互不相容的事件，并且$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$，则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$构成一个完备事件组（图 3.9）.

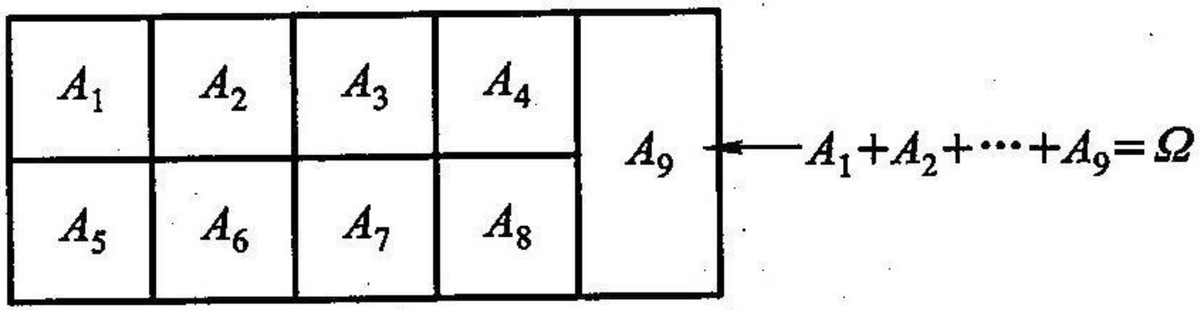


图 3.9

3.1.4 事件运算的性质

3.1.4 事件运算的性质

设 A、B、C 是同一随机试验 E 的事件,那么满足下列性质:

性质 1 交换律 $A+B=B+A$, $AB=BA$;

性质 2 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$,

$(AB)C=A(BC)$;

性质 3 分配律 $A(B+C)=AB+AC$(图 3.10),

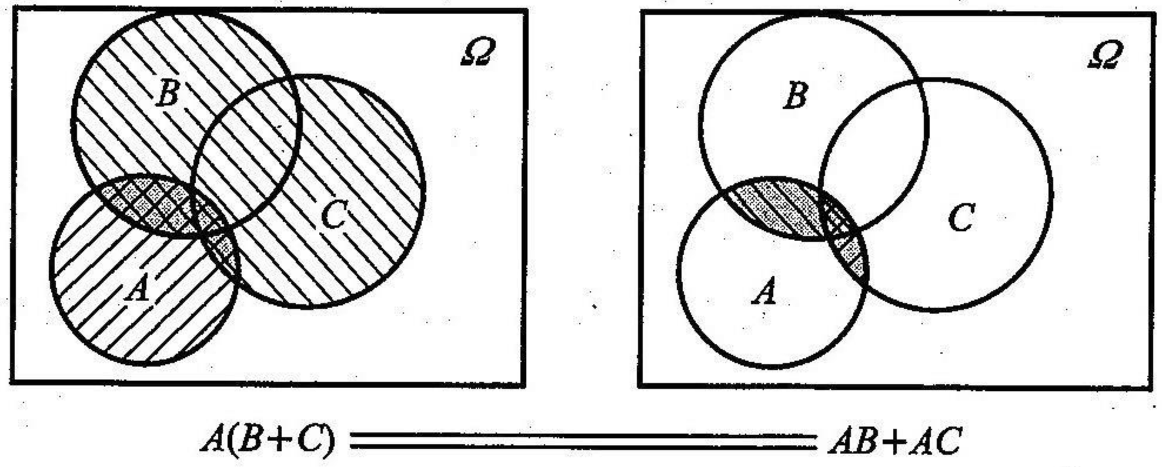


图 3.10

$$(A+B)(A+C)=A+BC\text{(图 3.11)};$$

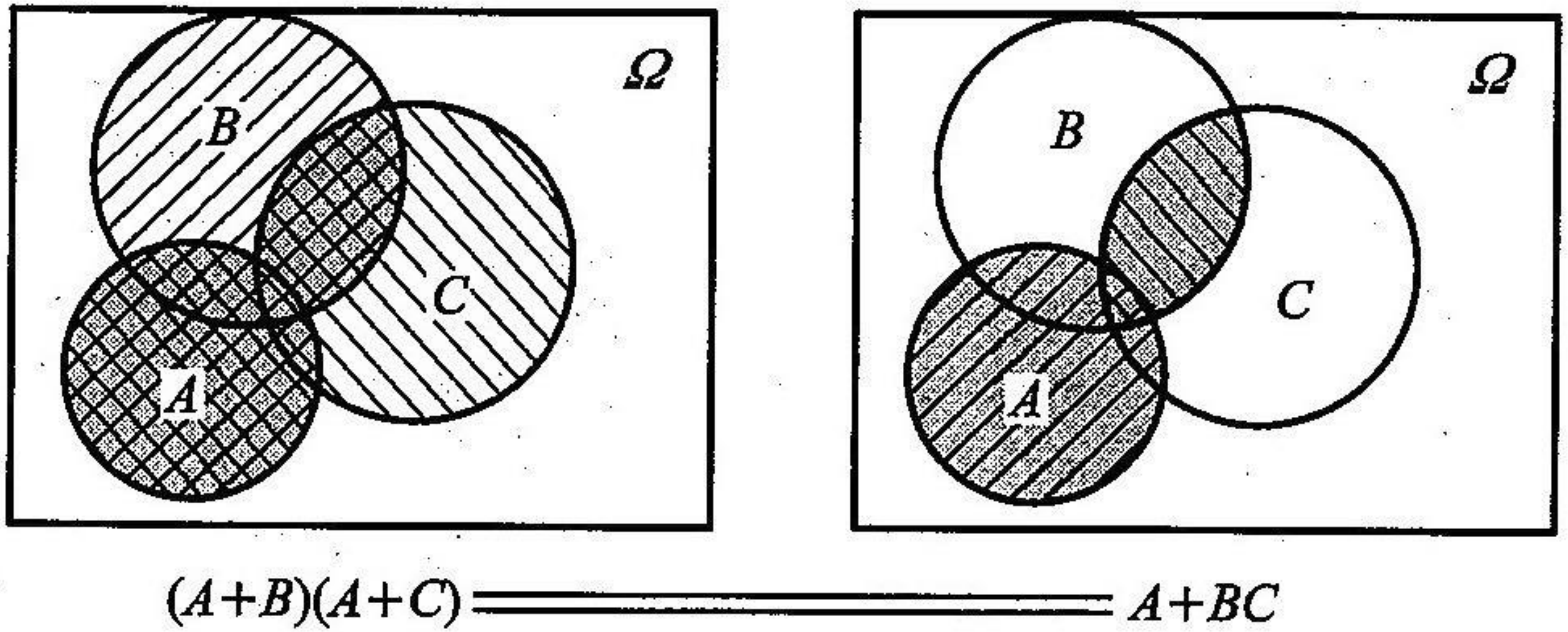


图 3.11

性质 4　德摩根(De Morgan[英],1806—1871)律(对偶律)

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}\text{(图 3.12)},$$

$$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}\text{(图 3.13)};$$

推广到多个事件:

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\cdots\cdot\overline{A}_n;$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A}_1+\cdots+\overline{A}_n.$$

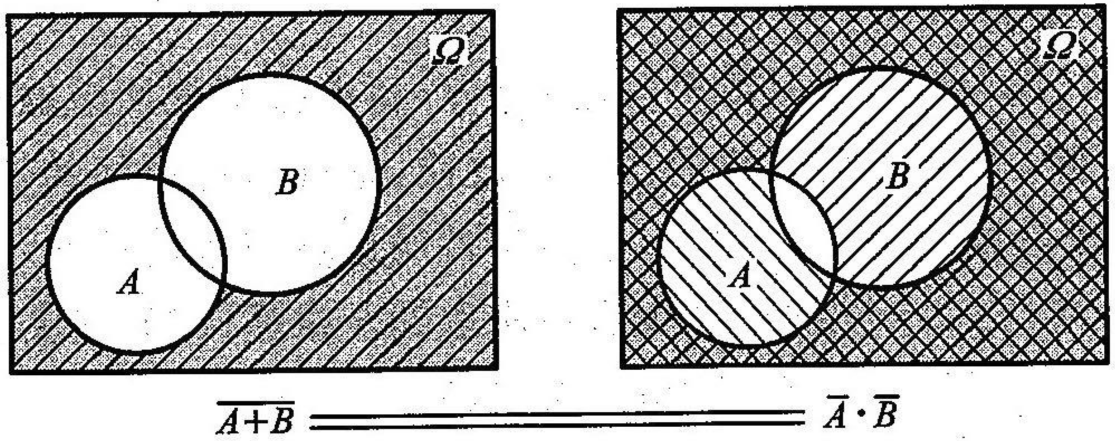
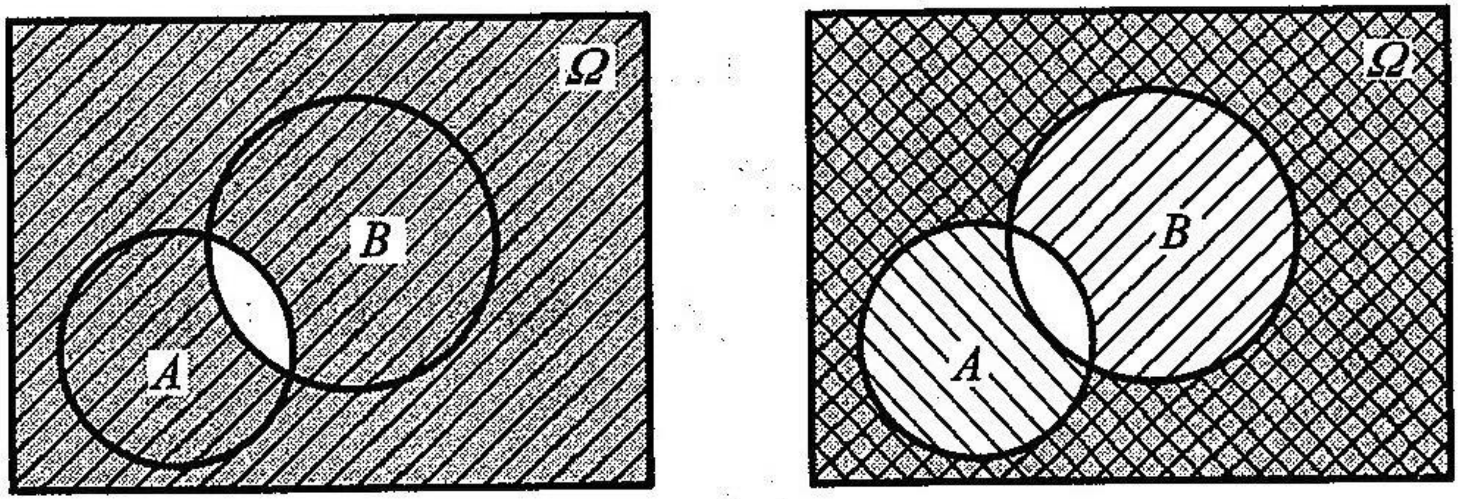


图 3.12



$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

图 3.13

性质 5 吸收律 $AB + A = A$， $(A + B)A = A$；

性质 6 对立律 $A + \overline{A} = \Omega$， $A\overline{A} = \varnothing$.

例 3.1.2 掷一颗骰子的试验 E，观测出现的点数：事件 A 表示“偶数点数”，事件 B 表示“小于 4 的奇数点数”，事件 C 表示“大于 2 的点数”，用集合的列举表示法表示下列事件：$\Omega, A, B, C, A+B, B-C, BC, \bar{A}B, \bar{A}+C$.

解 根据题意知

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}, \quad A=\{2,4,6\}, \quad B=\{1,3\},$$

$$C=\{3,4,5,6\}, \quad A+B=\{1,2,3,4,6\}, \quad B-C=\{1\},$$

$$BC=\{3\}, \quad \bar{A}B=\{1,3\}, \quad \bar{A}+C=\{1,3,4,5,6\}.$$

例 3.1.3 某人向某目标进行射击三次，用 A 表示事件"三次射击中至少有一次击中"，B 表示事件"三次射击中至少有两次击中"，C 表示事件"三次都未击中"．问 $\bar{A}, \bar{B}, A-B, AB, AC, A+C$ 各表示什么事件．

解 $\bar{A}=$"三次射击都未击中"$=C$，

$\bar{B}=$"三次射击中，至多击中一次"，

$A-B=$"三次射击中，恰有一次击中"，

$AB=$"三次射击中至少击中两次"$=B$，

$AC=\varnothing$（不可能事件），

$A+C=\Omega$（必然事件）．

例 3.1.4 从一批产品中每次取出一个产品进行不放回试验(即每次取出的产品不再放回. 若每次将取出的产品再放回,则称为有放回的试验),事件 A_i 表示第 i 次取到合格品($i=1,2,3$). 试用事件的运算符号表示下列事件:(1) 三次都取到了合格品;(2) 三次中至少有一次取到合格品;(3) 三次中恰有两次取到合格品;(4) 三次中至多有一次取到合格品.

解 (1) 三次都取到合格品:$A_1A_2A_3$;

(2) 三次中至少有一次取到合格品:$A_1+A_2+A_3$;

(3) 三次中恰有两次取到合格品:

$$A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3;$$

(4) 三次中至多有一次取到合格品:

$$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$$