文科高等数学

2.3 一般线性方程组的求解

2.3.1 线性方程组的一般理论

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$ （或写成矩阵形式 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$）

其中 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为常数项矩阵.

特别地，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{O}$，称为齐次线性方程组，它至少有一个零解，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

定理 2.3.1 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 分别是 n 元线性方程组系数矩阵与增广矩阵. 若秩 $r(\boldsymbol{A})<r(\overline{\boldsymbol{A}})$，则方程组无解；若秩 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$，则方程组有解，当 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=n$ 时，方程组有唯一解；当 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<n$ 时，有无穷多个解，且通解一定含 $n-r$ 个任意常数.

例 2.3.1 解线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$$

解 写出增广矩阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$，对 $\overline{A}$ 施行适当初等行变换，化成阶梯形，即

$$\overline{A} \xrightarrow[R_3 + R_1 \times (-3)]{R_2 + R_1 \times (-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times \frac{1}{7}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 + R_3 \times (-4)]{R_1 + R_3 \times 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

故 $r(\overline{A})=r(A)=3$，且 $n=3$.

因此方程组有唯一解.

于是得到原方程组的同解方程组

$$\begin{cases}1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=1\ ,\\0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3=2\ ,\\0\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3=3\ ,\end{cases}$$

也即求得原方程组的唯一解：

$$\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\\x_3=3.\end{cases}$$

例 2.3.2 解方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

解 增广矩阵为 $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，对 $\overline{A}$ 施行适当初等行变换，化成阶梯形，即

$$\overline{A} \xrightarrow[R_3 + R_1 \times (-3)]{R_2 + R_1 \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \left(-\frac{1}{5}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2 \times 5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

故　$r(\bar{A})=3$,而 $r(A)=2$　$r(\bar{A})\neq r(A)$,方程组无解.

原方程组同解于方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 = 0, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 1, \end{cases}$$

其中第三个方程 $0=1$ 是矛盾方程,也可知原方程组无解.

例 2.3.3 解方程组
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

解
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 + R_1 \times (-1)]{R_2 + R_1 \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2 \times 1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2 \times (-3)}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故　$r(\bar{A})=r(A)=2$，而 $n=4$

故方程组有无穷多组解，且解中含有 $4-2$ 个任意常数.

故得原方程组的同解方程组 $\begin{cases} x_1+0\cdot x_2-x_3+x_4=-1, \\ 0\cdot x_1+x_2+2x_3+0\cdot x_4=1. \end{cases}$

为求出其通解，将不处于每行第一个非零系数的变量 x_3 与 x_4 移至方程的右端，即得同解方程组 $\begin{cases} x_1=x_3-x_4-1, \\ x_2=-2x_3+1. \end{cases}$ 然后，令 $x_3=c_1, x_4=c_2$，就得到

$$x_1=c_1-c_2-1, x_2=-2c_1+1,$$

因此原方程组的通解为：

$$\begin{cases} x_1=c_1-c_2-1 \\ x_2=-2c_1+1 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2, \text{其中 } c_1, c_2 \text{ 为任意常数.} \end{cases}$$

由于 c_1 与 c_2 的任意性，方程组有无穷多个解．例如，取 $c_1=1, c_2=0$，则得一特解 $x_1=1-1=0, x_2=-2\cdot 1+1=-1, x_3=1, x_4=0$；又若取 $c_1=0, c_2=1$，则得另一特解 $x_1=-1-1=-2, x_2=1, x_3=0, x_4=1$.

例 2.3.4 解线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$

解 $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 + R_1 \times (-1)]{R_2 + R_1 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{R_3 + R_2 \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[R_1+R_3\times 1]{R_2+R_3\times(-3)}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-2&2\\0&-1&0&0&-1&2\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-2&2\\0&1&0&0&1&-2\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}$$

故 $r(\bar{A})=r(A)=3$，而 $n=5$

故方程组有无穷多组解，且解中含有 $5-3$ 个任意常数.

原方程组的同解方程组为：

$$\begin{cases}x_1 \quad\quad -x_4-2x_5=2\\ \quad x_2 \quad\quad\quad +x_5=-2\\ \quad\quad x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$$

为求出其通解，将不处于每行第一个非零系数的变量 x_4 与 x_5 移至方程的右端，得同解方程组：

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_4 + 2x_5 \\ x_2 = -2 - x_5 \\ x_3 = -x_4 - x_5 \end{cases}$$

令 $x_4 = c_1, x_5 = c_2$，得 $x_1 = 2 + c_1 + 2c_2, x_2 = -2 - c_2, x_3 = -c_1 - c_2$

因此原方程组的通解为：

$$\begin{cases} x_1 = 2 + c_1 + 2c_2 \\ x_2 = -2 - c_2 \\ x_3 = -c_1 - c_2 \\ x_4 = c_1 \\ x_5 = c_2 \end{cases} \qquad \text{其中 } c_1、c_2 \text{ 为任意常数.}$$

通过一系列初等行变换，将矩阵变换为最简单的形式：
1. 为阶梯型矩阵
2. 每一行最左侧的非零数字为数字1
3. 每一行最左侧非零数字1所在的列只有这一个非零数字
完成化简后：
1. 将矩阵还原为方程组：
2. 每一行的最左侧非零数字1所在的列对应的未知数留在等式的左侧，其余未知数移项到等式右侧
3. 等式右侧的未知数可以取值任意常数，并决定等式左侧的未知数的值

解线性方程组：
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 8 \end{cases}$$

解　方程组的增广矩阵为　$\overline{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -3 & 4 & 3 & -1 & 8\end{pmatrix}$,

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -3 & 4 & 3 & -1 & 8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 4\\ 2 & -1 & 1 & -1 & -2 & 2\\ 1 & -3 & 4 & 3 & -1 & 8\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 & -6\\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & -8\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

故方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩相同，均为 3.

所以原方程组的同解方程组为$\begin{cases} x_1 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

令 $x_4 = c_1$，$x_5 = c_2$，则方程组的通解为

$\begin{cases} x_1 = c_1 + c_2, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 2 - c_1, \\ x_4 = c_1, \\ x_5 = c_2. \end{cases}$，其中 C_1，C_2 为任意常数。


我太难了
上辈子我一定是道数学题

2. 齐次线性方程组解的基本定理

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$，增广矩阵只比系数矩阵多一个最后的零列，在用初等行变换求秩的过程中，零列始终不变，因此秩 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$，方程组必然有解. 事实上，它一定有零解 $x_1=0, x_2=0, \cdots, x_n=0$. 于是我们有

定理 2.3.2 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 一定有零解. 当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，只有零解；当 $r(\boldsymbol{A})<n$ 时，有无穷多个非零解，且通解含 $n-r$ 个任意常数.

例 2.3.5 解线性方程组
$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0. \end{cases}$$

解 这是齐次线性方程组,运用消元法求解时,只需对其系数矩阵作初等行变换,而将 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 省略,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4+R_1\times(-2)]{\substack{R_2+R_1\times(-1) \\ R_3+R_1\times(-4)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 + R_2 \times (-2)]{R_3 + R_2 \times 6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \times \frac{1}{9}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 + R_3 \times 1 \\ R_4 + R_3 \times (-12)}]{R_1 + R_3 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{D}.$$

再作一次初等行变换 $R_2 + R_1 \times (-1)$ 可得矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $r(\overline{A})=r(A)=3$，而 $n=5$

故方程组有无穷多组解，且解中含有 $5-3$ 个任意常数.

于是原方程组同解于方程组(注意，这是齐次方程组)：

$$\begin{cases} x_1+x_3-\dfrac{7}{6}x_5=0, \\ x_2-x_3-\dfrac{5}{6}x_5=0, \\ x_4-\dfrac{1}{3}x_5=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_3+\dfrac{7}{6}x_5, \\ x_2=x_3+\dfrac{5}{6}x_5, \\ x_4=\dfrac{1}{3}x_5. \end{cases}$$

令 $x_3=d_1$，$x_5=d_2$，即得原方程组通解

$$x_1=-d_1+\frac{7}{6}d_2, x_2=d_1+\frac{5}{6}d_2, x_3=d_1, x_4=\frac{1}{3}d_2, x_5=d_2,$$

其中 d_1 与 d_2 为任意常数.

解齐次线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 15x_2 - 6x_3 + 13x_4 = 0 \end{cases}$$

解：
$$\begin{pmatrix}2&-5&1&-3\\-3&4&-2&1\\1&2&-1&3\\-2&15&-6&13\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\-3&4&-2&1\\2&-5&1&-3\\-2&15&-6&13\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&10&-5&10\\0&-9&3&-9\\0&19&-8&19\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&-2&1\\0&-9&3&-9\\0&19&-8&19\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&-2&1\\0&0&-15&0\\0&0&30&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&-2&1\\0&0&1&0\\0&0&30&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}。$$

可得原方程组的同解方程组为$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$，令 $x_4 = c$，

则方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = -c \\ x_2 = -c \\ x_3 = 0 \\ x_4 = c \end{cases}$，其中 c 为任意常数.

解齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

解： $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 8 & 1\\ 1 & 3 & -9 & 7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 2 & -7 & 4\\ 0 & 2 & -7 & 4\\ 0 & 4 & -14 & 8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 2 & -7 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3/2 & 1\\ 0 & 1 & -7/2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$r(A)=2<n=4$，方程组有无穷多组解，通解为

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{3}{2}c_1-c_2 \\ x_2=\dfrac{7}{2}c_1-2c_2 \\ x_3=c_1 \\ x_4=c_2 \end{cases}$$

，其中 c_1，c_2 为任意常数.


$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) -}{\Delta x}$
$-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{}$
$p-b)\cdot(p-c) = p$
$g\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$
$\cos\alpha + c$
$\log_a b = \frac{\log}{\log}$