文科高等数学

2.1 行列式

2.1.1 行列式的定义

1. 二、三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

用消元法解上述方程组,可以得到:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

定义一个记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

会有

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

把二阶行列式用于方程组(2.1),称二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

为线性方程组的系数行列式,当 $D\neq0$ 时,上述方程组有唯一解为:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 D_1 是把系数行列式 D 中 x_1 的系数用常数项替换后得到的,D_2 是把系数行列式 D 中 x_2 的系数用常数项替换后得到的.

完全类似地，对三元线性方程组也有相应的结果.

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,三元线性方程组的唯一解为:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D}. \end{cases} \tag{2.4}$$

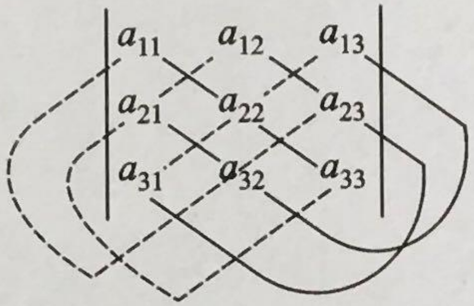
其中D_1为 D 中 x_1的系数替换为常数项,D_2为 D 中 x_2的系数替换为常数项,D_3为 D 中 x_3的系数替换为常数项.

我们称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$是一个三阶行列式，其值为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \end{aligned}$$

其中 a_{ij}称为行列式位于第 i 行第 j 列的元素.

为便于记忆，三阶行列式表示的代数和可以用下图来表示，沿各实线相连的三个元素的积取正号，沿虚线相连的三个元素的积取负号.



上式法则称为“沙流氏法则”.

例 2.1.1　解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

解　方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}=11\neq 0,$$

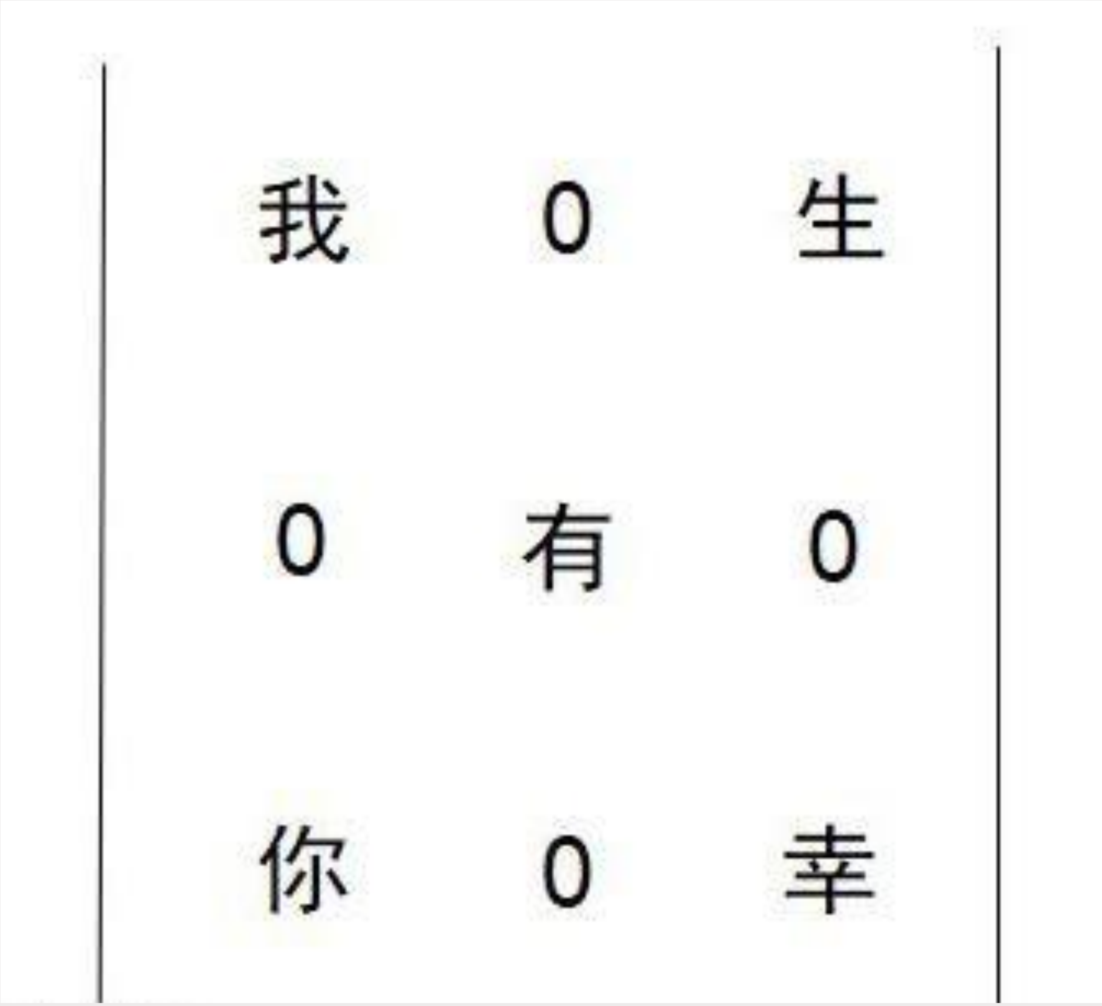
$$D_1=\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & -4 & 2\end{vmatrix}=-21,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=4,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 3\end{vmatrix}=35,$$

故方程组解为：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = -\dfrac{21}{11}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{4}{11}, \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{35}{11}. \end{cases}$$



我有幸一生有你

2. 任意 n 阶行列式的定义

由三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad (2.5)$$

记

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

M_{11}, M_{12}, M_{13}分别称为三阶行列式中元素 a_{11}, a_{12}, a_{13}的余子式(即 M_{ij}是三阶行列式中划去 a_{ij}所在的行与列元素,剩余的元素按照原来顺序组成的子行列式).

记 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}, A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}, A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}$,

分别称为 a_{11}, a_{12}, a_{13}的代数余子式,因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

同理,在(2.5)中,进行不同的组合,可以得到:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \text{(称为三阶行列式按第二行展开)}$$

$$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \text{(称为三阶行列式按第三行展开)}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \text{(称为三阶行列式按第一列展开)}$$

$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \text{(称为三阶行列式按第二列展开)}$$

$$= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \text{(称为三阶行列式按第三列展开)}.$$

定义 由 n^2 个数(元素) $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排列成 n 行 n 列,并在左右各画一竖线,即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式.

$$D_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}(i=1,2,\cdots,n)\text{(称为 } n \text{ 阶行列式按第 } i \text{ 行展开)}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}(j=1,2,\cdots,n)\text{(称为 } n \text{ 阶行列式按第 } j \text{ 列展开)}$$

其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式,

M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式.

即 M_{ij} 是 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在第 i 行元素和第 j 列元素后按原来顺序排成的 $n-1$ 阶行列式.

例 2.1.2 计算 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解 由于行列式中第 4 列有 2 个零元素,因此按第 4 列展开来计算行列式(思考:为什么):

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2A_{14} + 2A_{24} + 0A_{34} + 0A_{44} = 2 \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 2 \times (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \times 4 + 2 \times 6 = 4.$$

从上面的例子可以看出,在计算高阶行列式时,尽量选择零元素较多的行(列),按此行(列)展开,可以化简计算.

2．设行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$，求代数余子式 A_{23}.

2．设行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$，求代数余子式 A_{23}.

解：$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}=(-1)^{2+3}\times(-1)^{2+1}\times 2\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-14.$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 34 \\ 3 & 2 & 34 & 4 \end{bmatrix}$$

送你一个矩阵，心意都在行列式里面了

2.1.2 行列式的性质

为了有效地进行行列式的计算,有必要研究其性质,并由此得到实际可行的计算方法.

性质 1　n 阶行列式 D_n 等于其任一行(列)中各元素与它们所对应的代数余子式的乘积之和,即行列式可以按任一行(列)展开:

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad i=1,2,\cdots,n \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad j=1,2,\cdots,n. \end{aligned}$$

性质 2　行列式的行与列互换，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

此性质表明，在行列式中，行与列的地位是对称的，行列式中有关行的性质完全适用于列.

性质 3　交换行列式中任意两行(列),其值变号.

推论　若行列式有两行(列)的对应元素相同,则该行列式等于零.

性质 4　用常数 c 乘行列式 D_n 中某行(列)的每个元素所得到的行列式,其值等于用 c 乘以该行列式(若行列式某行(列)所有元素含有公因数 c,则可将该公因数 c 提到行列式外面),即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1　若行列式中某行(列)的所有元素全为 0,则该行列式等于 0.

在性质 4 中取 $c=0$ 即可.

推论 2　若行列式有两行(列)的对应元素成比例,则该行列式等于 0.

性质 5 把行列式的任一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上,行列式不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

该性质在行列式的具体计算中相当重要,它可以把行列式的某行(列)消成只有一个元素非零的形式. 在求行列式的过程中,上述对行和列的变换可以混合使用.

设行列式$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{13} & a_{11}+a_{12} \\ 2a_{21} & a_{23} & a_{21}+a_{22} \\ 2a_{31} & a_{33} & a_{31}+a_{32} \end{vmatrix}$且$D_1=m$，则$D_2=$

A -2m

B -m

C 0

D m

提交

2.1.3 行列式的计算

例 2.1.3 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

解　观察行列式,选择第 2 列,确定 +1 元素,

$$D_4 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1A_{32} = (-1)^{2+3}M_{32} = (-1)\begin{vmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \\ -33 & 0 & -9 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -8 & 6 \\ -33 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\times 2\times\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -33 & -9 \end{vmatrix} = (-2)\times 3\times\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -11 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (-6)\times 3\times\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -11 & -1 \end{vmatrix} = -18\times 15 = -270.$$

例 2.1.4 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 选择按第 1 列展开行列式，

$$D_4 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}.$$

上述行列式称上三角形行列式,上三角形行列式中行、列互换后的行列式称为下三角形行列式.

显然,上(下)三角形行列式等于主对角线元素的乘积,特别的

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

例 2.1.5 已知 $\begin{vmatrix} a+1 & 2 & 2 \\ -2 & a+4 & -5 \\ 2 & -2 & a+1 \end{vmatrix}=0$，求 a 的值.

解 左端三阶行列式是 a 的三次多项式，故这是一元三次方程求根的问题. 先利用行列式的性质化简行列式：

$$\begin{vmatrix} a+1 & 2 & 2 \\ -2 & a+4 & -5 \\ 2 & -2 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & 0 & a+3 \\ -2 & a+4 & -5 \\ 2 & -2 & a+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+3 & 0 & 0 \\ -2 & a+4 & -3 \\ 2 & -2 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)\begin{vmatrix} a+4 & -3 \\ -2 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=(a+3)[(a+4)(a-1)-6]=(a+3)(a+5)(a-2).$$

已知 $(a+3)(a+5)(a-2)=0$,

故 $a=-3$，或 $a=-5$，或 $a=2$.

单选题 1分

设置

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 4 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$，则 x =

A 0 或 1

B 1 或 2

C -1 或 1

D 0 或 2

提交

（1）计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{vmatrix}$的值。

（1）计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{vmatrix}$的值。

解：原式$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=4\times1\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-12$；

$$\begin{vmatrix} 73 & 74 & 75 \\ 75 & 73 & 74 \\ 74 & 75 & 73 \end{vmatrix}$$