文科高等数学

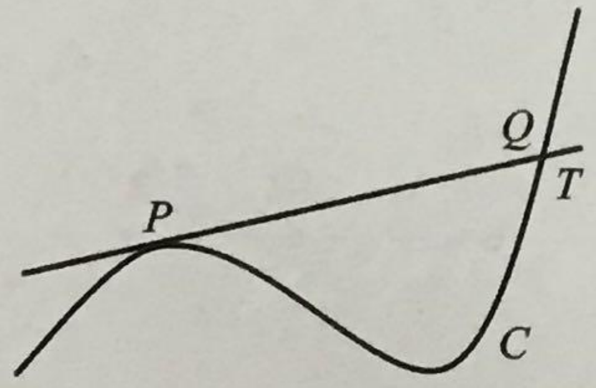
1.3 导数与微分

1.3.1 导数概念

1. 曲线的切线斜率

我们知道,圆的切线定义为与圆相交于唯一点的直线. 但对于一般曲线,切线是不能这样定义的. 例如图 1.28 中曲线在 P 点处的切线,除 P 点外还交曲线于 Q 点.

为确切表达切线的含义,需应用极限的思想. 请看图 1.29.



曲线C的切线PT

图 1.28

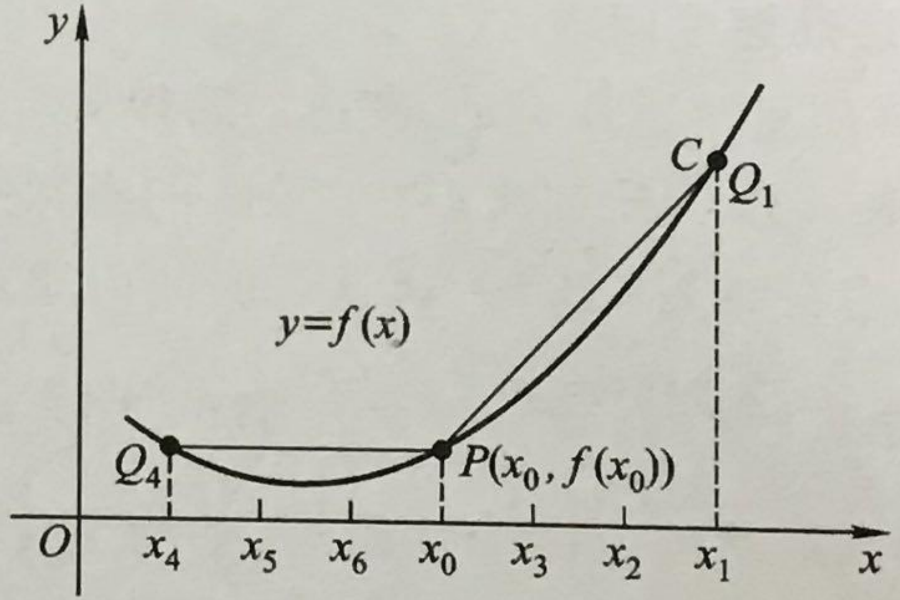


图 1.29

点 $P(x_0,f(x_0))=P(x_0,y_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的给定点，点 $Q(x,y)=Q(x,f(x))$ 是曲线上的动点，可在 P 的两侧：在右侧时 $x>x_0$；在左侧时 $x<x_0$. 动直线 PQ 是曲线的割线.

如果动点 Q 无限地逼近定点 P 时，动直线 PQ 有一个极限位置 PT，即 $PT=\lim\limits_{Q\to P}PQ$，则称 PT 为曲线在 P 点的**切线**.

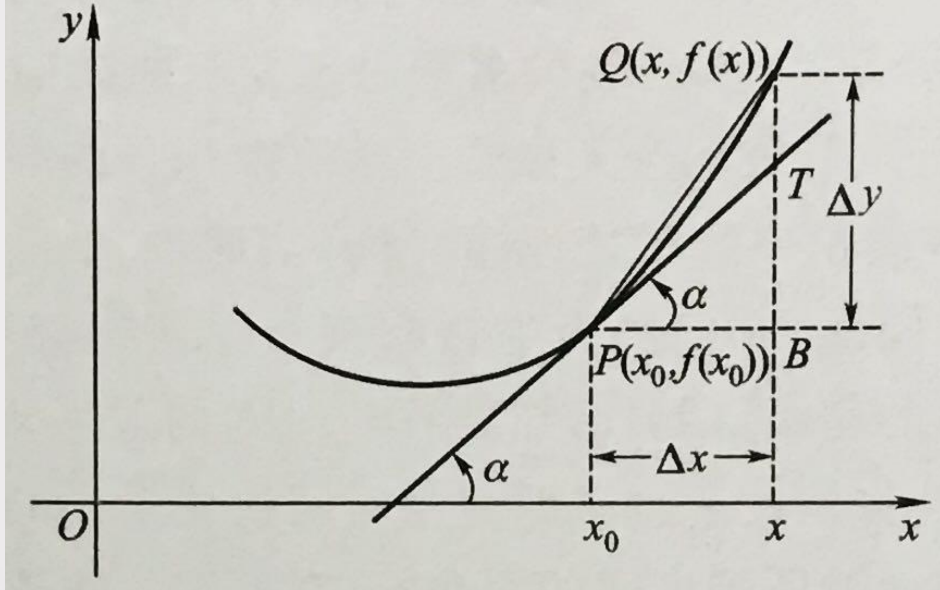


图 1.30

现在割线 PQ 的斜率为$\dfrac{BQ}{PB}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,则切线 PT 的斜率为:

$$k=\lim_{Q\to P}(PQ\text{ 的斜率})=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

由此得切线 PT 的方程是:$y-f(x_0)=k(x-x_0)$.

即要求曲线在任一点的切线转化为求极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

3. 导数的定义

从曲线的切线斜率以及其他有关函数变化速度问题，我们抽象出函数的导数概念.

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的一个邻域 X 内有定义，$y_0=f(x_0)$. 如果 $x\in X-\{x_0\}$，则称 $\Delta x=x-x_0$（Δ 读作 delta）为**自变量的改变量**，$\Delta y=f(x)-f(x_0)$ 为**函数的**（对应）**改变量**，比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 为函数的**平均变化率**. 如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 **可导**，该极限称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点关于自变量 x 的**导数**，记作 $y'(x_0)=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. 因 $\Delta x=x-x_0$，$x=x_0+\Delta x$，故还有

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

此时，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线方程是

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

注 (1) Δx 可正可负，依 x 大于或小于 x_0 而定.

(2) 从定义可知，若 $y=f(x)$ 在 x_0 可导，必有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，因为否则当 $\Delta x\to 0$ 时，比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不能趋于一个常数.

单选题 1分

设置

设f(x)在x_0点可导， 且$f'(x_o)=3$，则极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_o-h)-f(x_0)}{h}=$

A –3

B 0

C 3

D 不确定

提交

单选题 1分

设置

已知函数f(x)可导，满足$f(-x)=-f(x)$ 且$f'(-x_o)=k$，则$f'(x_0)=$

A $-k$

B 0

C k

D 不确定

提交

例 1.3.1 求常数函数 $y=c$ 的导数.

解 因 $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=c-c=0$,差商 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$,故 $y'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$. 此处 x 可为任意实数,即常数函数 $y=c$ 在任意点 x 处的导数为 0.

例 1.3.2 设 n 是正整数,求幂函数 $y=x^n$ 在点 x 处的导数.

解 因

$$y(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^n=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n,$$

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n,$$

故

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\right]=nx^{n-1}.$$

特别,当 $n=1$ 时,函数 $y=x$ 在任意点 x 处的导数为 1.

例 1.3.3 求曲线 $y=x^3$ 在点(2,8)处的切线方程.

解 在上例中取 $n=3$ 可知函数 $y=x^3$ 在点 x 处的导数为 $3x^2$，于是在点(2,8)处的切线斜率是：$y'(2)=3\cdot 2^2=12$，故曲线 $y=x^3$ 在(2,8)处的切线方程是

$$y-8=12\cdot(x-2)\Leftrightarrow 12x-y-16=0.$$

注 (1) 从上述例子看到,一般情况下,给定函数 $y=f(x)$ 在某个区间 X 内每一点都可导,这样可求出 X 内每一点的导数 $y'(x)$,$x\in X$. 于是 $y'(x)$ 成为 X 内有意义的一个新函数,称它为给定函数 $y=f(x)$ 的**导函数**,且常常省略定义中的字样“在 x 点处关于自变量的”,甚至简称 $f(x)$ 的**导数**. 例如我们说常数函数 $y=c$ 的导数是 0,$y=x$ 的导数是 1,$y=x^n$ 的导数是 nx^{n-1} 等等,分别记作 $c'=0, x'=1, (x^n)'=nx^{n-1}$ 等等.

(2) 关于改变量的记号 Δ,应把它与其后面的变量 x 或 y 看作一个整体,就像 $\sin x$ 中的 sin 一样,绝不能把 Δx 看成 Δ 与 x 的乘积,特别,为避免误解,我们用 $(\Delta x)^2$ 来表示 Δx 的平方而不写 Δx^2.

从导数的定义还可以得出其他一些基本初等函数的导数公式：

例 1.3.4 $y=\sin x$ 的导数是 $(\sin x)'=\cos x$，$y=\cos x$ 的导数是 $(\cos x)'=-\sin x$.

证 $$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\,\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

同理可证，$(\cos x)'=-\sin x$.

例 1.3.5 $y=\log_a x(0<a\neq 1)$的导数是$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

证 $$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\frac{x+\Delta x}{x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

例 1.3.6 指数函数 $y=a^x(0<a\neq 1)$ 的导数是 $(a^x)'=a^x\ln a$.

证 $(a^x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$，令 $t=a^{\Delta x}-1$，则 $\Delta x=\log_a(1+t)$，于是

$$(a^x)'=a^x\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=a^x\lim_{t\to 0}\frac{t}{\dfrac{\ln(1+t)}{\ln a}}=a^x\ln a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$

$$=a^x\ln a\cdot\frac{1}{\ln e}=a^x\ln a.$$

特别，$(e^x)'=e^x$.

注 上面两例的推导过程中使用了重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

单选题 1分

设置

已知曲线$y = x^2 + x - 2$ 在M点处切线的斜率为3，则M点坐标为

A (1, 0)

B (1, 1)

C (0，–2)

D (2, 4)

提交

1.（1）若已知 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，能否得到极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$

存在的结论?

（2）若已知极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ 存在，能否得出 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处

可导，且 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ 的结论?

上述两个问题，如结论是肯定的，请给出证明，如结论是否定的，请详细说明

解 （1）肯定。证明如下

$$\lim_{\Delta x->0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\Delta x->0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f'(x_0)+f'(x_0)]=f'(x_0).$$

（2）否定。

因为 $f(x)$ 在 x_0 点不一定连续，不连续必不可导。

例如 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 处不连续，必不可导，

但极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ 存在。

设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，求 $f'(1)$.

解： $\because \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，极限存在

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

又已知 $f(x)$在$x=1$处连续，即$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

故 $f(1)=0$

再次利用已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$及导数定义可知：

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$$

$\therefore \quad f'(1)=2$.

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)}{2x} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$，且 $f(x),\varphi(x)$ 都在 $x=0$ 点连续，

（1） 求 $\varphi(0)$，　（2） $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 点是否可导？为什么？

解:（1）由 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\phi(x)}{2x}=2,$

又因 $\lim\limits_{x\to 0} 2x=0$，且 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 点连续

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\phi(x)=0=\phi(0).$

（2）由导数定义，$\phi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\phi(x)-\phi(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\phi(x)}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\phi(x)}{2x}=4,$

即 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 点可导，且 $\varphi'(0)=4$。

1.3.2 微分概念

设函数$y = f(x)$在$x = x_0$处可导

- 记自变量改变量为Δx
- 记函数改变量为$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
- 则$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- 微分$dy = f'(x_0)\Delta x$可以用来逼近Δy
- 特别的，对于函数$y = x$，有$dx = dy = \Delta x$，由此得 $dx = \Delta x$

设函数y = f(x)在$x = x_0$处可导

- 微分公式一般写为$dy = f'(x_0)dx$
- 记号上，有$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = y' = f'$
- 由$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$极限存在可知，$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，即 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，其中$x = x_0 + \Delta x$ 因此y = f(x)在$x = x_0$处可导说明y = f(x)在$x = x_0$处连续。
- 计算函数值的近似公式为$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$


可倒一定连续
连续不一定可倒

1.3.3 导数与微分的计算

1. 导数与微分的四则运算

设 $u=u(x)$,$v=v(x)$ 为可导函数,c 是常数,则有

公式 1 $(\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{v})'=\boldsymbol{u}'\pm\boldsymbol{v}'$,$\mathbf{d}(\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{v})=\mathbf{d}\boldsymbol{u}\pm\mathbf{d}\boldsymbol{v}$.

证 $$[u(x)+v(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=u'(x)+v'(x).$$

又 $\mathrm{d}(u+v)=(u+v)'\mathrm{d}x=u'\mathrm{d}x+v'\mathrm{d}x=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v$.

对于减法,可同样证明.

公式 2 $(uv)'=u'v+uv',\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v.$

证 $$[u(x)v(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)]-[u(x)\cdot v(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)]+[u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$（注意 $v(x)$ 的可导性蕴含了 $v(x)$ 的连续性）.

$\mathrm{d}(uv)=(uv)'\mathrm{d}x=(u'v+uv')\mathrm{d}x=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v.$

公式 3 $(cu)'=cu',\mathrm{d}(cu)=c\mathrm{d}u.$

证 $(cu)'=c'u+cu'=0+cu'=cu'.\ \mathrm{d}(cu)=(cu)'\mathrm{d}x=cu'\mathrm{d}x=c\mathrm{d}u.$

公式 4 $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,\mathrm{d}u-u\,\mathrm{d}v}{v^2}\ (v\neq 0)$.

证 $$\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)]-[u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)]}{v(x)v(x+\Delta x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)}{\Delta x}-\frac{u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[v(x)\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\right]-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)}=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'\mathrm{d}x=\frac{vu'-uv'}{v^2}\mathrm{d}x=\frac{vu'\mathrm{d}x-uv'\mathrm{d}x}{v^2}=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}.$$

例 1.3.7 求 $y=\tan x$ 的导数.

解
$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

同理可得$(\cot x)'=-\csc^2 x$.

例 1.3.8 求 $y=\sec x$ 的导数.

解 $$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{1'\cdot\cos x-1\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{0+\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

同理可得 $(\csc x)'=-\csc x\cot x.$

例 1.3.9 求 $y=(1+4x)(2x^2-3x^3)$ 的导数.

解一

$$y'=(1+4x)'(2x^2-3x^3)+(1+4x)(2x^2-3x^3)'$$
$$=4(2x^2-3x^3)+(1+4x)(2\cdot 2x-3\cdot 3x^2)$$
$$=8x^2-12x^3+4x-9x^2+16x^2-36x^3=4x+15x^2-48x^3$$

解二 因 $y=2x^2+5x^3-12x^4$，故

$$y'=2\cdot 2x+5\cdot 3x^2-12\cdot 4x^3=4x+15x^2-48x^3.$$

例 1.3.10 求函数 $y=(x+\sin x)\ln x$ 的微分.

解
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= \ln x\,\mathrm{d}(x+\sin x)+(x+\sin x)\,\mathrm{d}\ln x \\
&= \ln x(\mathrm{d}x+\mathrm{d}\sin x)+(x+\sin x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \ln x\cdot(\mathrm{d}x+\cos x\,\mathrm{d}x)+\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(\ln x+\cos x\ln x+1+\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

单选题 1分

设置

曲线 y=1/x 在点（1/2， 2）处的切线方程为

A y=4x

B y=−4x+4

C y=1/x

D y=−4x

提交

定理 1.3.2(链锁法则)　设 $z=f(y)$，$y=\varphi(x)$ 分别在点 $y_0=\varphi(x_0)$ 与 x_0 可导,则复合函数 $z=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 可导,且 $\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $(f\circ\varphi)'(x_0)=f'(y_0)\cdot\varphi'(x_0)$.

例 1.3.11 求 $y=\sin 5x$ 的导数.

解 令 $u=5x$,则 $y=\sin u$. 于是 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos u\cdot 5=5\cos 5x$.

例 1.3.12 求 $y=\ln\cos x$ 的导数.

解 令 $u=\cos x$,则 $y=\ln u$. 于是 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{u}\cdot(-\sin x)=-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$.


e^{2x}
$\frac{d}{dx}$
e^{2x}
e^{2x}
$\frac{d}{dx}$

例 1.3.13 求幂函数 $y=x^m$ 的导数,m 为任意实数.

解 因 $y=\mathrm{e}^{\ln x^m}=\mathrm{e}^{m\ln x}$,令 $u=m\ln x$,则 $y=\mathrm{e}^u$.

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^u\cdot m\cdot\frac{1}{x}=\frac{m}{x}\cdot\mathrm{e}^{m\ln x}=\frac{m}{x}\cdot x^m=mx^{m-1}.$$

m 是正整数 n 时,即例 1.3.2.

（3）链锁法则可以推广到多层次中间变量的复合函数：

复合函数的求值：$x \longrightarrow y \longrightarrow z \longrightarrow u \longrightarrow \cdots \longrightarrow v \longrightarrow w$,

复合函数的求导：$w \longrightarrow v \longrightarrow \cdots \longrightarrow u \longrightarrow z \longrightarrow y \longrightarrow x$.

各导数$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}v},\cdots,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$相乘.

（4）在熟练掌握链锁法则以后，为简便写法，中间变量 v,u,z,y 等可不必写出，只要做到心中有数.

例 1.3.14 求 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的导数.

解 $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left[1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\right]$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+1)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(5) 链锁法则的微分形式是：$df(\varphi(x))=f'(\varphi(x))d\varphi(x)$.

例 1.3.15 求函数 $y=e^{\sin^2 x}$ 的微分.

解 $dy=e^{\sin^2 x}d\sin^2 x=e^{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\,d\sin x=e^{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cos x\,dx$

$=e^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x\,dx.$

单选题 1分

设置

曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在点（1, 1）处的切线方程为

A $y-1=-1/2\,(x-1)$

B $y=x$

C $y=x-1$

D $y=-1/2\,(x-1)$

提交

设$y=5^{\sin(\ln x)}$，则 dy=

A $5^{\sin(\ln x)}\,dx$

B $5^{\sin(\ln x)}\cos(\ln x)\,dx$

C $5^{\sin(\ln x)}\ln 5\cdot\cos(\ln x)\,dx$

D $5^{\sin(\ln x)}\ln 5\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$

提交

单选题 1分

设置

设$y=\frac{\sin e^x}{x^2}+\ln 3$，则 dy=

A $\frac{e^x\cos e^x}{x^4}dx$

B $\frac{e^x\cos e^x-2\sin e^x}{x^2}dx$

C $\frac{xe^x\cos e^x-2\sin e^x}{x^3}dx$

D $\frac{xe^x\cos e^x-2\sin e^x}{x^3}+\ln 3\,dx$

提交

单选题 1分

设$y = \ln(\sec x + \tan x)$，则 dy=

A tan x dx

B sec x dx

C (tan x + sec x) dx

D 1/(tan x + sec x) dx

提交

单选题 1分

设$y = e^{\sin x} + \ln\cos x$，则 $y' =$

A $e^{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$

B $\cos x \cdot e^{\sin x} - \tan x$

C $(e^{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x})\,\mathrm{dx}$

D $(\cos x \cdot e^{\sin x} - \tan x)\,dx$

提交

3. 基本初等函数的导数与微分公式

求导公式	求微分公式
(1) $c'=0$	$\mathrm{d}c=0$
(2) $(x^m)'=mx^{m-1}$	$\mathrm{d}x^m=mx^{m-1}\mathrm{d}x$, $m\in\mathbf{R}$
(3) $(a^x)'=a^x\ln a$	$\mathrm{d}a^x=a^x\ln a\,\mathrm{d}x$, $0<a\neq 1$
$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$	$\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
(4) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$\mathrm{d}\log_a x=\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln a}$, $0<a\neq 1$
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$\mathrm{d}\ln x=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$
(5) $(\sin x)'=\cos x$	$\mathrm{d}\sin x=\cos x\,\mathrm{d}x$
(6) $(\cos x)'=-\sin x$	$\mathrm{d}\cos x=-\sin x\,\mathrm{d}x$
(7) $(\tan x)'=\sec^2 x$	$\mathrm{d}\tan x=\sec^2 x\,\mathrm{d}x$
(8) $(\cot x)'=-\csc^2 x$	$\mathrm{d}\cot x=-\csc^2 x\,\mathrm{d}x$
(9) $(\sec x)'=\sec x\tan x$	$\mathrm{d}\sec x=\sec x\tan x\,\mathrm{d}x$
(10) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$\mathrm{d}\csc x=-\csc x\cot x\,\mathrm{d}x$

$$(11)\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$(12)\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}\arccos x = \frac{-\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(13)\ (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \mathrm{d}\arctan x = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$(14)\ (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \mathrm{d}\operatorname{arccot} x = \frac{-\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

例 1.3.16 求 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 的微分.

解 $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}\cdot\dfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)$

$$=-\frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot 2x\mathrm{d}x=-\frac{\operatorname{sign} x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

注 此处 $\operatorname{sign} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 为符号函数.

例 1.3.17 求 $y=\dfrac{3}{x^{4}}+\arctan e^{x}$ 的导数.

解 $y'=3(x^{-4})'+\dfrac{1}{1+(e^{x})^{2}}\cdot(e^{x})'=\dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}}-\dfrac{12}{x^{5}}.$

求函数 $y=\dfrac{\cos x}{e^{x}}+\sqrt{1+x^{2}}\ln(1+x^{2})$ 的导数及微分

求函数 $y=\frac{\cos x}{e^x}+\sqrt{1+x^2}\ln(1+x^2)$ 的导数及微分

$$y'=\frac{-\sin x\cdot e^x-\cos x\cdot e^x}{e^{2x}}+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\ln(1+x^2)+\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}$$

$$=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(\ln(1+x^2)+2)$$

$$dy=-e^{-x}(\sin x+\cos x)dx+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(\ln(1+x^2)+2)dx$$

1.3.4 导数的导数----二阶导数

一般来说，函数 $y=f(x)$ 的导数还是以 x 为自变量的函数：$y'=f'(x)$，如果它还可导，我们又可得 $f'(x)$ 的导数：$(y')'=[f'(x)]'$，称为 $y=f(x)$ 的**二阶导数**，记作

$$y''=f''(x)\text{，或}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2f}{dx^2}.$$

如果它还可导，我们就可继续逐次求三阶，四阶，…的导数. 对任意正整数 n，n 阶导数被定义为 $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$，$n=2,3,\cdots$，统称为函数 y 的**高阶导数**.

例 1.3.18 求 $y=\sin x$ 的 n 阶导数.

解 $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，用归纳法不难求出 $y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

例 1.3.20 求 $y=\arctan x$ 的二阶导数 y''.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}, y''=-(1+x^2)^{-2}(1+x^2)'=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

单选题 1分

设置

已知$y = \ln(x+1)$， 则$y''|_{x=0} =$

A -1

B 0

C 1

D 2

提交

1.3.5 分段函数的导数

例 1.3.21 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0, \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 的连续性与可导性.

解 因 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^x=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$,故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$,且 $f(0)=\mathrm{e}^0=1$.

由此可见 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

其次,为求 $f'(0)$,我们需计算极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$.

而极限存在⇔其左极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$,右极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ 存在且相等.

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(\Delta x)^2+1-1}{\Delta x}=0$$

左极限、右极限都存在但不相等,故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\text{不存在}$$

即函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处不可导.

例 1.3.22 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x & x\leqslant 0\\ \ln(x+1)-2\sin x & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的可导性.

解 要讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性即讨论

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\text{是否存在}$$

而

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x-0}{\Delta x}=-1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\ln(\Delta x+1)-2\sin\Delta x}{\Delta x}=-1$$

故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=-1$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=-1$

从上面例子可以看出，要求分段函数在分段点处的可导性，即要用导数的定义判定即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 是否存在，又由极限的性质，此极限存在的充分必要条件是其左、右极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$，$\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 是否存在且相等，因此，求分段函数在分段点处的可导性转化为判定 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$，$\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 是否存在，相等.

设函数 $f(x)$ 满足 $f'_{+}(1)=-2$， $f'_{-}(1)=0$，试问 $f(x)$ 在 $x=1$ 点处是否连续?

设函数 $f(x)$ 满足 $f'_+(1)=-2$， $f'_-(1)=0$，试问 $f(x)$ 在 $x=1$ 点处是否连续?

解： $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2$，

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$，

上述两个极限都存在

故 $\lim\limits_{x\to1+}(f(x)-f(1))=0$， $\lim\limits_{x\to1-}(f(x)-f(1))=0$

从而有 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$

因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 点处连续.