文科高等数学

1.2 极限

几个故事

以子之矛攻子之盾

禁忌的无理数

龟兔赛跑

兔子追不上乌龟

1.2.2 极限概念

定义 给定数列$\{x_n\}$,若项数 n 无限增大时(记作 $n\to\infty$),通项 x_n 无限地接近常数 A,则称 A 为数列$\{x_n\}$的**极限**,记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,同时说数列$\{x_n\}$**收敛**到 A. 否则称数列$\{x_n\}$**发散**.

注 "$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$"读作"$n$ 趋于无穷大时 x_n 的极限是 A",也简化读作"limit x_n 等于 A".

例 1.2.3 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}$.

解 因$\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1+\dfrac{(-1)^n}{n}$,其中$\dfrac{(-1)^n}{n}$随 n 无限增大时无限地逼近 0,故 $1+\dfrac{(-1)^n}{n}$无限地逼近 1. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1$.

有了数列的极限，但是微积分的主要研究对象是函数，数列是自变量取正整数值的特殊函数，不仅要研究数列的变化趋势，更需要研究一般函数在自变量向某个方向变化时函数(因变量)值是如何变化的. 实际上，函数极限是微积分学的最基本工具，它贯穿微积分学的始终. 我们先看两个例子.

例 1.2.6 当 $|x|$ 无限地逼近于 0 时，看函数 $f(x)=x\sin x$ 是如何变化的？

解 我们从图 1.16 看到，x 在 0 的两侧无限地逼近于 0 时，函数值(图像上的点的纵坐标) $x\sin x$ 无限地逼近 0.

这种情况记作 $x\sin x\to 0\ (x\to 0)$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin x=0$.

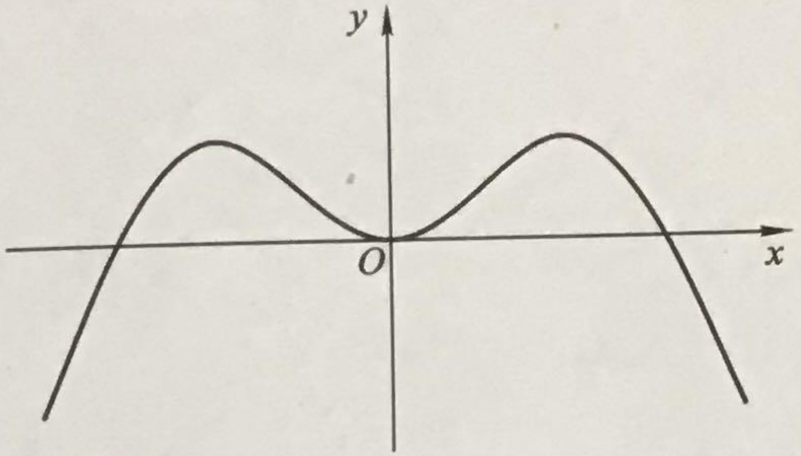


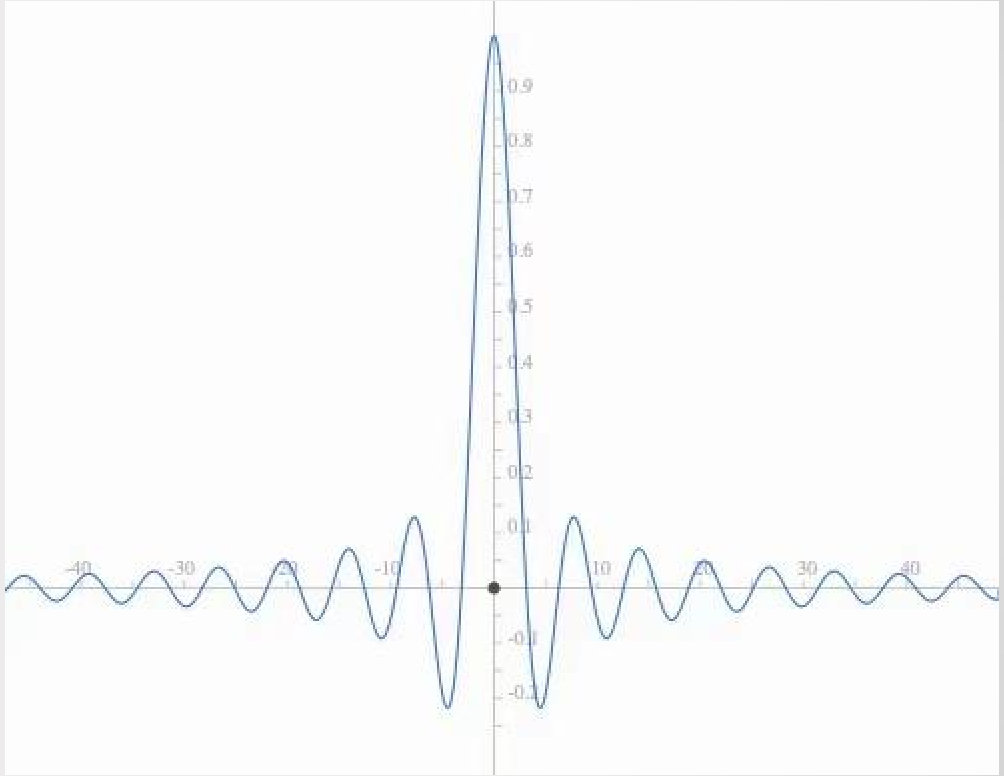
图 1.16

例 1.2.7 当 x 无限增大时，看函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 是如何变化的？

解 我们从图 1.17 看到，x 无限增大时，函数值 $\dfrac{\sin x}{x}$ 无限地逼近 0.

这种情况记作 $\dfrac{\sin x}{x}\to 0\ (x\to+\infty)$

或 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$



仔细观察上述两个例子后，就能理解函数极限的下述直观描述.

函数极限的定义　设 $y=f(x)$ 是给定函数，如果自变量 x 在定义域内按照某种趋势（记作 $x\to\square$）变化时，函数值 $f(x)$ 相应的变化而无限地逼近常数 A，则称 A 为函数在该变化过程中的**极限**，或说 y **收敛**到 A（简称 y **有极限**或 y **收敛**），记作 $\lim\limits_{x\to\square}y=A$，读作 x 趋于$\square$时函数 y 的极限是 A.

这里 $x\to\square$ 表明 x 的变化趋势,有六种不同情况:

1) $x\to a$:x 无限地逼近于 a,读作 x 趋于 a. 比如,例 1.2.6 的 $x\to 0$.

注 x 可大于 a 也可小于 a,即从 a 的左右两侧无限地逼近 a,但 x 能否等于 a 不必计较.

2) $x\to+\infty$:x 的值无限地增大,读作 x 趋于正无穷大. 比如,例 1.2.7 的 $x\to+\infty$.

3）$x \to -\infty$：x 的值无限地减小，读作 x 趋于负无穷大.

例 1.2.8 $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$（图 1.18）

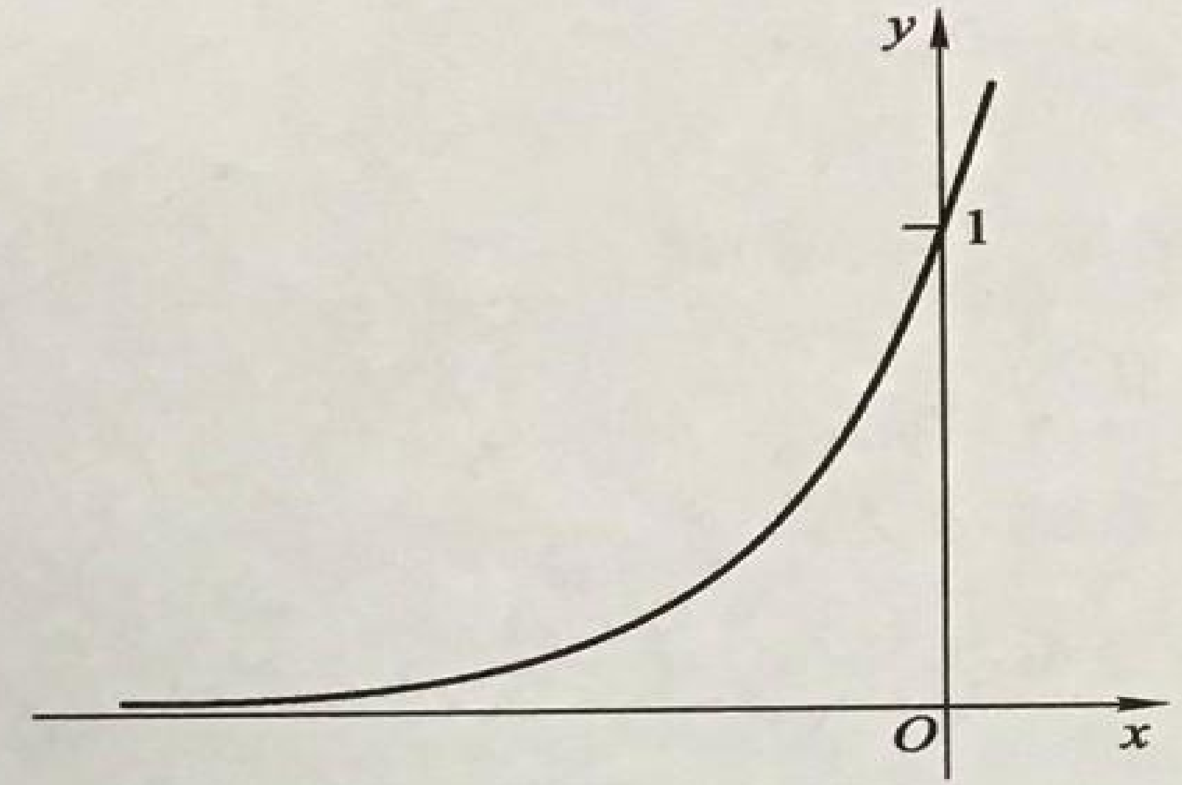


图 1.18

4）$x \to \infty$：$|x|$无限地增大，读作 x 趋于无穷大.

例 1.2.9 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$（图 1.19）.

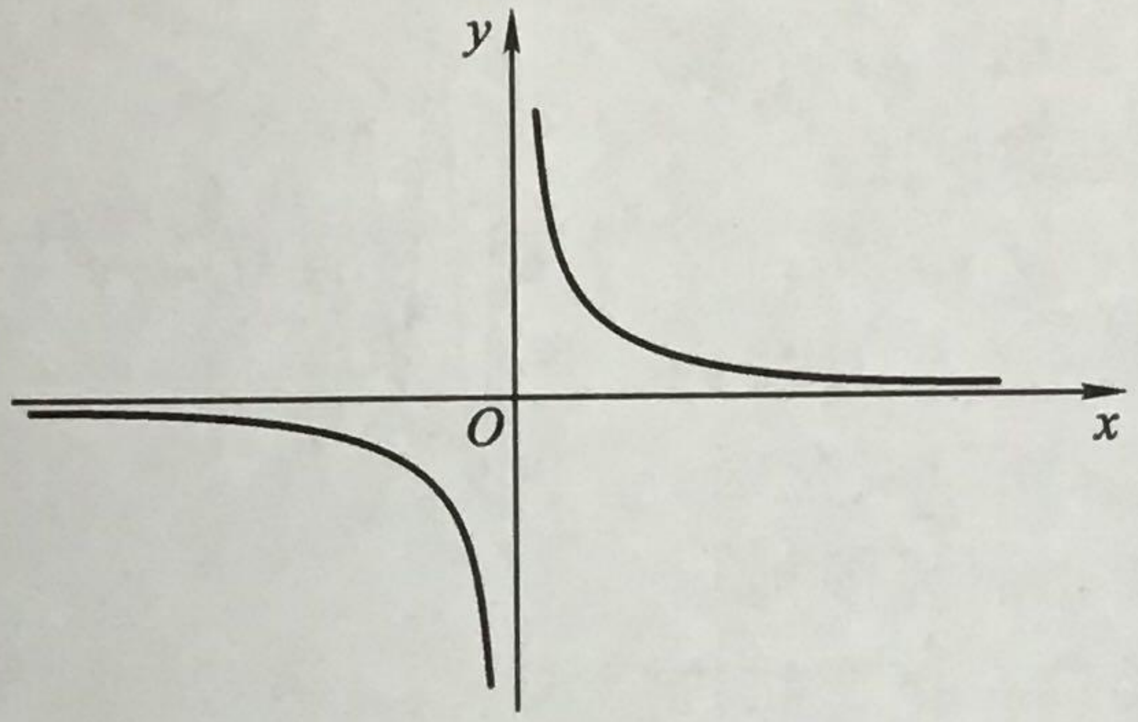


图 1.19

5) $x \to a^+$: x 大于 a 而无限地逼近 a，读作 x 趋于 a 加，称 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ 为 $f(x)$ 在 a 点的**右极限**.

6) $x \to a^-$: x 小于 a 而无限地逼近 a，读作 x 趋于 a 减，称 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ 为 $f(x)$ 在 a 点的**左极限**.

注 $f(x)$ 在 a 点的左或右极限中 x 能否等于 a 不必计较.

例 1.2.10 $\lim\limits_{x \to 3^+} [x] = 3$, $\lim\limits_{x \to 3^-} [x] = 2$（图 1.20）.

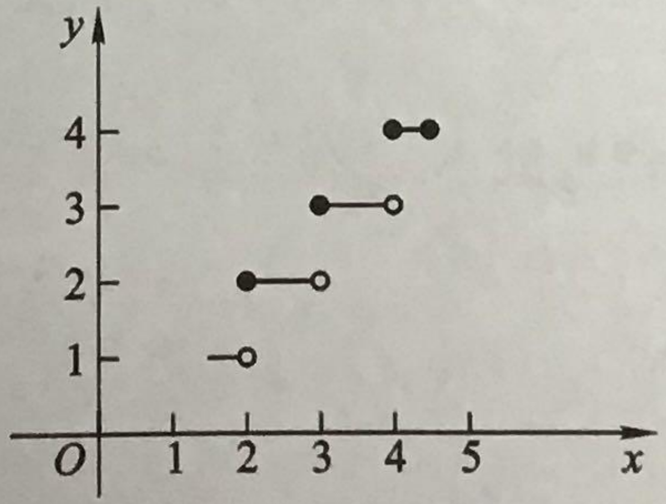


图 1.20

请仔细观察此例中左右极限的差别. 为了进一步理解函数极限的概念，再看三个例子.

例 1.2.11 设 $f(x)=2x, x\in(0,2)$，则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$（图 1.21）.

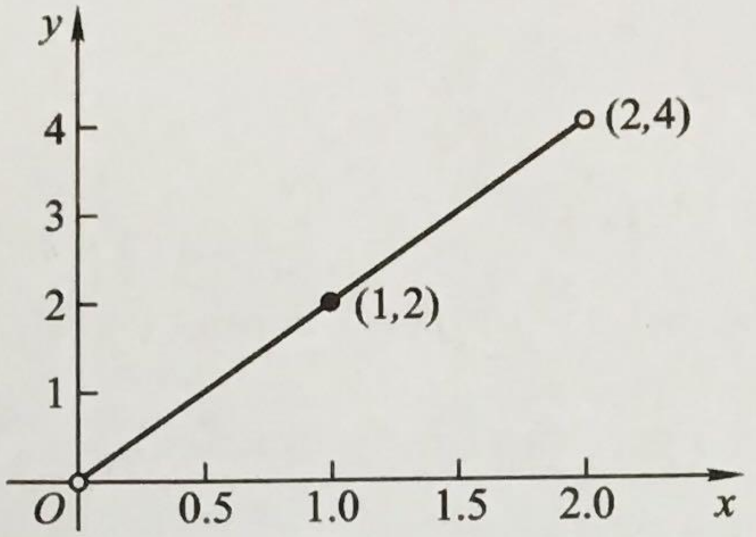


图 1.21

例 1.2.12 设 $g(x)=2x, x\in(0,1)\cup(1,2)$，则 $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2$（图 1.22）.

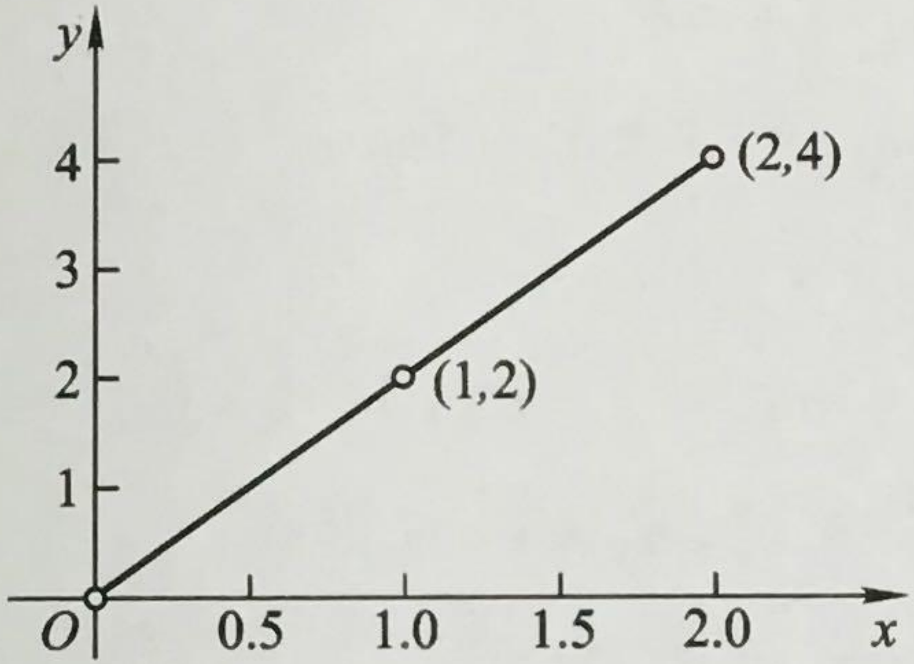


图 1.22

例 1.2.13 设 $h(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ 2x, & x\in(0,1)\cup(1,2),\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to1}h(x)=2$(图 1.23).

上述 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是三个不同的函数，但 $x\to1$ 时的极限都是 2，三个函数的差别在于定义域不同，或在 $x=1$ 处的函数值不同. 这说明在自变量 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 的极限与函数值 $f(a)$ 有没有定义，究竟如何定义毫无关系，也就是说，自变量 x 趋于 a 并不要求 $x=a$，x 能否取 a 值，并不影响极限的存在与等于什么.

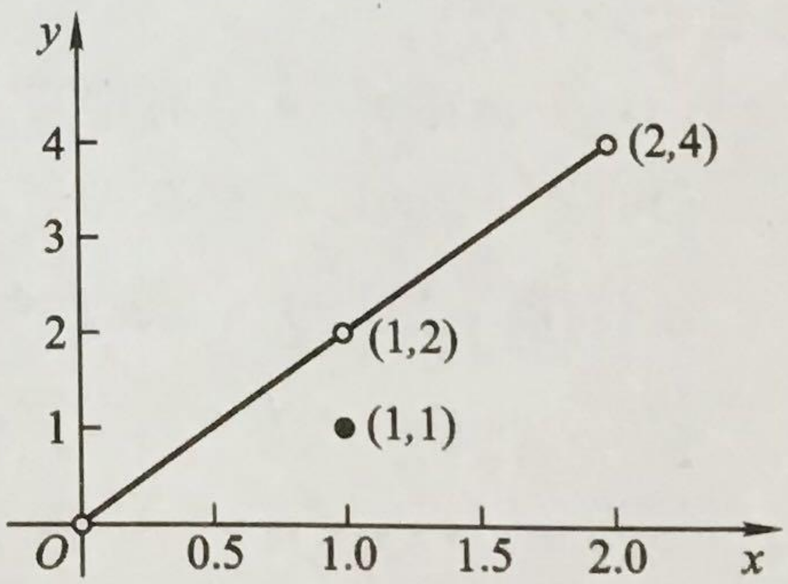


图 1.23

1.2.3 极限的性质

设 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\square} g(x)$ 均存在, c 为常数, 则有

性质 1 $\lim\limits_{x\to\square} c = c$.

性质 2 $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

性质 3 $\lim\limits_{x\to\square} cf(x) = c\lim\limits_{x\to\square} f(x)$.

性质 4 $\lim\limits_{x\to\square}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to\square} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\square} g(x)$.

性质 5 $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to\square} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\square} g(x)$.

性质 6 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\square} f(x)}{\lim\limits_{x\to\square} g(x)}$, 此处 $\lim\limits_{x\to\square} g(x) \neq 0$.

性质 7 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

例 1.2.14 求$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-3)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}x^2+\lim\limits_{x\to 1}2x-\lim\limits_{x\to 1}3=(\lim\limits_{x\to 1}x)^2+2\lim\limits_{x\to 1}x-3=1^2+2\cdot 1-3=0$.

例 1.2.15 求$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x-2)$.

解 原式 $=(\lim\limits_{x\to 1}x)^2+\lim\limits_{x\to 1}x-2=1^2+1-2=0$.

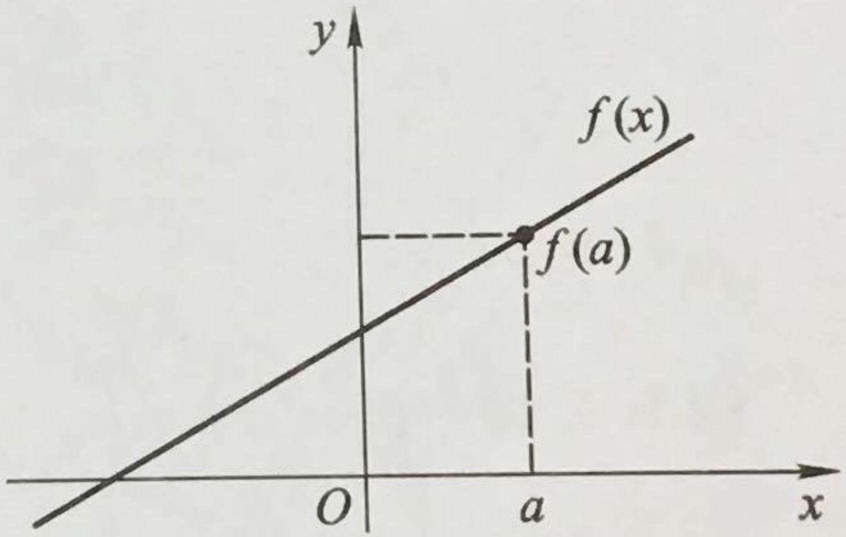
定义 如果在函数 $y=f(x)$ 的定义域内，

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$，则称 $y=f(x)$ 在点 a **连续**(图 1.24)；即 $f(x)$ 在 $x=a$ 点连续，需要满足三个条件：

(i) $f(x)$ 在 $x=a$ 点有定义；

(ii) 极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在；

(iii) 极限值 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 等于函数值 $f(a)$.



$f(x)$在a点连续

图 1.24

(2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$，则称 $y = f(x)$ 在点 a **右连续**；

(3) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$，则称 $y = f(x)$ 在点 a **左连续**.

式子 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ 等价于 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x)$.

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点连续，则称 $f(x)$ 为 (a,b) **内的连续函数**或 $f(x)$ 在 (a,b) 连续.

若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点连续，且在 a 点右连续，在 b 点左连续，则称 $f(x)$ 为**闭区间** $[a,b]$ **上的连续函数**或 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

定理 1.2.1　初等函数是其定义区间内的连续函数.

根据这个特征，初等函数在定义区间内的极限就等于函数值，即若 a 是初等函数 $f(x)$ 的定义区间内一点，则 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. 这为计算初等函数的极限提供了极大的方便.

例 1.2.16 求$\lim\limits_{x\to 2}\lg\sin\dfrac{\pi}{x}$.

解 因 $x=2$ 是初等函数 $\lg\sin\dfrac{\pi}{x}$定义域内一点,故

$$\text{原式}=\lg\sin\lim_{x\to 2}\frac{\pi}{x}=\lg\sin\frac{\pi}{2}=0.$$

单选题 1分

设置

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 5\cos(x-1)}{x+2} =$$

A　-1

B　0

C　1

D　2

提交


3 rules:
-no wishing for death
-no falling in love
-no bring back dead people
I want to divide by zero
There are 4 rules

例 1.2.17 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$.

解 本函数分子与分母的极限均为 0,我们不能运用性质 6 来计算,否则将得$\dfrac{0}{0}$,无法确定其值.但可以约去分子分母的公因式 $x-1$ 后再行计算:

$$原式=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}=\frac{1+3}{1+2}=\frac{4}{3}.$$

例 1.2.18 求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1+x+x^2)-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(-1)+(-x-1)}{1+x+x^2}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(-x-2)}{\lim\limits_{x\to 1}(1+x+x^2)}=\frac{-1-2}{1+1+1^2}=-1.$$

例 1.2.19 求$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$.

解 原式$=\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(x-1)(\sqrt{x}+2)}$

$$=\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(x-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x \to 4} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{(4-1)(\sqrt{4}+2)}=\frac{1}{12}.$$

练习：计算下列极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^3-x}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^3-x}.$$

$$原式=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x(x+1)}=2.$$

（2） $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{1}{6};$$

1. 下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，请说明理由；如果是错的，请给出一个反例说明.

这里的括号需要理解为小括号
并不是取整函数的意思

（1）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在；

（2）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ 不存在；

（1）正确。

若 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$存在，则

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0}[(f(x)+g(x))-f(x)]=\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim_{x\to x_0} f(x).$$

极限存在，与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不存在矛盾。

（2）不正确。

前面提到的例1.2.18也是一个不错的例子

设 $f(x)=\sin x, g(x)=-\sin x, x_0=+\infty$，则

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}-\sin x$不存在，但

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to+\infty}[\sin x+(-\sin x)]=\lim_{x\to+\infty}0=0$$ 存在。


别打扰我，我只爱高数
高等数学

1.2.4 两个重要极限

重要极限 1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

图 1.25 显示了函数$\frac{\sin x}{x}$在 $x=0$ 的邻近的变化趋势.

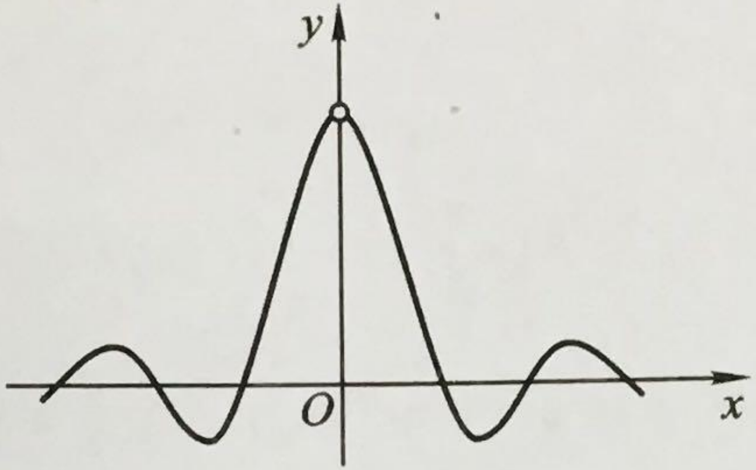


图 1.25

例 1.2.20 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

例 1.2.21 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解 令 $t=\arcsin x$,则 $x=\sin t$,于是原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin t}{t}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}}=1.$

注 此处令 $t=\arcsin x$ 的做法称为变量代换.

同理可得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1.$

重要极限 2 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=\mathrm{e}=2.718\ 28\cdots.$

例 1.2.22 求 $\lim\limits_{n\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}$.

解 原式 $=A_0\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{r}=A_0\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{r}=A_0\mathrm{e}^{r}$.

例 1.2.23 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n+5}$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)^{5}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{5}$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{-n}\right)^{\frac{-n}{3}}\right]^{-3}\cdot\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)\right]^{5}=\mathrm{e}^{-3}\cdot 1^{5}=\mathrm{e}^{-3}.$$

练习：计算下列极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{2x}$$

$$原式=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{\frac{-x}{2}(-4)}=[\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{\frac{-x}{2}}]^{-4}=e^{-4}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x})^{2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x})^{(-\frac{x}{3})\cdot(-6)}=e^{-6}$$

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{2}{x}}=e^{-4}$$

单选题 1分

设置

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1}=$$

A 0

B 1

C e^{-1}

D e

提交

单选题 1分

设置

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x =$$

A 1

B e

C e^{-2}

D e^{3}

提交

例 1.2.24 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln \mathrm{e}=1$.

例 1.2.25 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}$.

解 令 $t=\mathrm{e}^{x}-1$,则 $x=\ln(1+t)$. 于是

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\ln(1+t)}{t}}=1$.

1.2.5 无穷小量与无穷大量

定义　若变量 y 在某个变化过程中的极限是 0,则称 y 为该变化过程中的**无穷小量**,其倒数 $1/y(y\neq 0)$ 称为该变化过程中的**无穷大量**.

从定义可简言之,无穷小量与无穷大量互为倒数.

例 1.2.26　$$\lim_{x\to+\infty} a^x=\begin{cases}0, & 0<a<1,\\ +\infty, & a>1.\end{cases}$$

因此,若 $0<a<1$,则 a^x 是 $x\to+\infty$ 时的无穷小量;若 $a>1$,则 a^x 是 $x\to+\infty$ 时的(正)无穷大量.

例 1.2.29 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0.$

注 其中$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$. 我们说，$\sin\dfrac{1}{x}$是 $x\to 0$ 时的有界变量. 一般的说，如果存在正数 M，变量 u 在变化过程的某个时刻之后，恒有 $|u|\leqslant M$，则称 u 为有界变量. 例 1.2.29 表明：

定理 1.2.2 在某个变化过程中，无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量.

若$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=\lim\limits_{x\to\square} g(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}\neq\dfrac{\lim\limits_{x\to\square} f(x)}{\lim\limits_{x\to\square} g(x)}$，否则$\dfrac{0}{0}$无法确定. 称极限$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}$为$\dfrac{0}{0}$**型不定式**. 大量极限的计算属于此类情形.

定义 设$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=\lim\limits_{x\to\square} g(x)=0$，如果$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称$f(x)$与$g(x)$为$x\to\square$时的**等价无穷小**，记作$x\to\square$时$f(x)\sim g(x)$.

根据前面的计算，我们已经知道，在$x\to 0$的变化过程中，变量$\sin x$，$\tan x$，$\arcsin x$，$\arctan x$，$\ln(1+x)$，e^x-1都是与x等价的无穷小.


当 → 0 时
sin ~
tan ~
ln(1 +) ~
e − 1 ~
arcsin ~
arctan ~

定理 1.2.3 设 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=\lim\limits_{x\to\square} g(x)=\lim\limits_{x\to\square} h(x)=0$，且 $x\to\square$ 时 $f(x)\sim h(x)$，则

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{h(x)}{g(x)},\quad \lim_{x\to\square}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{g(x)}{h(x)}.$$

证

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{h(x)}{h(x)}\right)=\lim_{x\to\square}\left(\frac{h(x)}{g(x)}\cdot\frac{f(x)}{h(x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to\square}\frac{h(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{h(x)}{g(x)}.$$

同理有 $$\lim_{x\to\square}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{g(x)}{h(x)}.$$

这种用相对简单的无穷小量代替相对复杂的无穷小量的方法在极限计算中有着极大的实用性.

例 1.2.30 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\arctan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.（$x\to 0$ 时，$\sin 3x\sim 3x$，$\arctan 2x\sim 2x$）

注 应用等价无穷小代替的方法计算极限,必须符合上述定理的条件:一是必须为无穷小量,二是必须在乘除法中.请看下例.

例 1.2.31 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

说明:如果$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$,那就错了.这里 $\tan x\sim x$,$\sin x\sim x$,但它们用“减号”连接,因此不能用 x 代替它们.

单选题 1分

设置

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+5x)}{\sin\sqrt{5}x} =$$

A　0

B　1

C　$\sqrt{5}$

D　5

提交

计算 $\lim\limits_{x->0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$$\lim_{x->0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x->0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x->0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}$$

$$= 1.$$

1. 若 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0, \lim\limits_{x\to 2} g(x)=0$ ，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{3}$. 问

（1） 能否说“$f(x)+g(x)$ 是 $x\to 2$ 时的无穷小量”？为什么?

（2） 能否说“$f(x)$ 与 $\sqrt{3}g(x)$ 是 $x\to 2$ 时的等价无穷小”？为什么?

1. 若 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0, \lim\limits_{x\to 2} g(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{3}$. 问

（1） 能否说“$f(x)+g(x)$ 是 $x\to 2$ 时的无穷小量”？为什么？

（2） 能否说“$f(x)$ 与 $\sqrt{3}g(x)$ 是 $x\to 2$ 时的等价无穷小”？为什么？

解:（1）因为 $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to 2} f(x)+\lim\limits_{x\to 2} g(x)=0,$

所以 $f(x)+g(x)$ 是 $x\to 2$ 时的无穷小量。

（2）首先 $f(x)$ 与 $\sqrt{3}g(x)$ 都是 $x\to 2$ 时的无穷小量，且有

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{\sqrt{3}g(x)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}=1,$$

所以 $f(x)$ 与 $\sqrt{3}g(x)$ 是 $x\to 2$ 时的等价无穷小。

若$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\lim\limits_{x\to\square}g(x)=\infty$，则$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}\neq\dfrac{\lim\limits_{x\to\square}f(x)}{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}$，否则$\dfrac{\infty}{\infty}$无法确定. 称极限$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}$为$\dfrac{\infty}{\infty}$**型不定式.**

例 1.2.32 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{7x^3-5x^2+3x}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}$ （分子、分母同除 x^3）

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}=\frac{3}{7}$$

例 1.2.33 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-9x^2}{3x-\sqrt[4]{81x^8+1}}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^5}}-9}{\dfrac{3}{x}-\sqrt[4]{81+\dfrac{1}{x^8}}}$ （分子、分母同除 x^2）

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^5}}-9\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x}-\sqrt[4]{81+\dfrac{1}{x^8}}\right)}=\frac{-9}{-\sqrt[4]{81}}=3$$

2．设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}-1 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}} & x>0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处的连续性.

2．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}-1 & x<0\\ 1 & x=0\\ (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}} & x>0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处的连续性.

解：

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin 2x}{x}-1=1,$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^{-1},$$

f(x)在x=0处左连续但不右连续，因而不连续

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处的不连续.

2．设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}+b & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \dfrac{a\sin x}{x}-b & x>0 \end{cases}$，在 $x=0$ 点处连续，求 a,b 的值.

2．设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}+b & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \dfrac{a\sin x}{x}-b & x>0 \end{cases}$，在 $x=0$ 点处连续，求 a,b 的值.

解： $\because$ $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续。

即 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=f(0)$

而 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}(\dfrac{a\sin x}{x}-b)=a-b=1$ ①

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}(e^{ax}+b))=1+b=1$ ②

解①②得到 $a=1,\quad b=0$.