文科高等数学

1.1 函数

1.1.1 函数概念

如果只研究实数集合(用 $\mathbf{R}$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 表示)或其子集合之间的单值对应,这种映射就是函数.

定义　设 X 与 Y 都是 $\mathbf{R}$ 的子集合,对于 X 中每个元素(即数)x,按照一个确定的规则(记作 f)唯一对应着 Y 的一个元素 y,常记作

$$f:\ x \mapsto y \quad \text{或}\ y=f(x),$$

称 f 是集合 X 到集合 Y 的**函数**,记作 $f:\begin{cases} X\to Y,\\ x\mapsto y,\end{cases}$ x 与 y 分别称为**自变量**与**因变量**,X 称为**定义域**,$y=f(x)$ 也称为函数 f 在 x 处的**值**.同时,也常用

$$y=f(x),\quad x\in X$$

表示这个函数.当 x 取遍定义域中所有数时,对应函数值全体组成的集合

$$f(X)=\{y \mid y=f(x),\quad x\in X\}$$

称为函数 $f:\ X\to Y$ 的**值域**.函数 f 的定义域与值域分别用 D_f 与 R_f 表示.

注　定义域与对应规律是函数概念的两个基本要素.

函数图像 直角坐标平面上集合 $\Gamma_f=\{(x,y)\mid x\in D_f,y=f(x)\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图像,一般说来,Γ_f 是平面上一条曲线.

例 1.1.1 一次(线性)函数

$$f(x)=3x+2.$$

这是纯数学函数,摒弃了任何实际意义,其自变量允许取任何实数,因此其定义域 $D_f=\mathbf{R}$. 给定 x 的任何一个实数后,先用 3 乘再加 2,就得对应函数值. 例如:$f(4)=3\times4+2=14$. f 就表示从 x 到 $3x+2$ 的函数关系:

$$f:\begin{cases}\mathbf{R}\to\mathbf{R},\\ x\mapsto 3x+2.\end{cases}$$

显然此函数的值域 $R_f=\mathbf{R}$,其图像是一条直线.

若函数 f 的定义域被分成若干部分，各部分上 f 的对应规律用不同方式表达，则 f 称为**分段函数**.

例 1.1.2 证券交易市场对客户买卖股票收取的交易费 y 与交易额 x 之间的对应关系满足

$$y=\begin{cases}0, & x=0,\\ pq, & 0<x<q,\\ px, & x\geqslant q,\end{cases}$$

其中 p 与 q 为正的常数.

计算分段函数在给定自变量 $x=a$ 处的函数值时，先找到 a 在定义域的哪个部分，然后用相应的函数定义式计算. 例如，上例中计算 $y(b)$ 时，若 $b>q$，则 $y(b)=pb$.

此函数为分段函数，其定义域被分成3个部分，各部分上对应关系由不同代数式确定．上述函数的定义域是$[0,+\infty)$，其图像如图1.3所示，它由原点、一条不包括端点的开线段与一条射线组成，并且开线段与射线在点(q,pq)相连接．

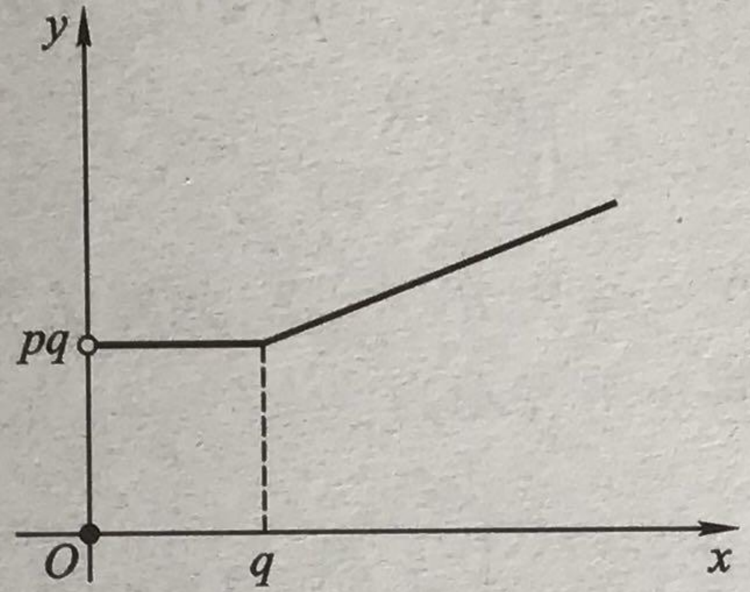


图1.3

例 1.1.4 取整函数$[x]$.

这是计算机上的重要函数,$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如:

$$[-1.352]=-2,\quad [-1]=-1,\quad [0]=0,\quad [0.3146]=0,\quad [\sqrt{2}]=1.$$

由此我们得到函数 $[\quad]:\begin{cases}\mathbf{R}\to\mathbf{R},\\ x\mapsto[x].\end{cases}$

$[\quad]$称为取整函数,$D_{[\ ]}=\mathbf{R}$,$R_{[\ ]}=\mathbf{Z}$,此处 $\mathbf{Z}$ 是全体整数的集合.

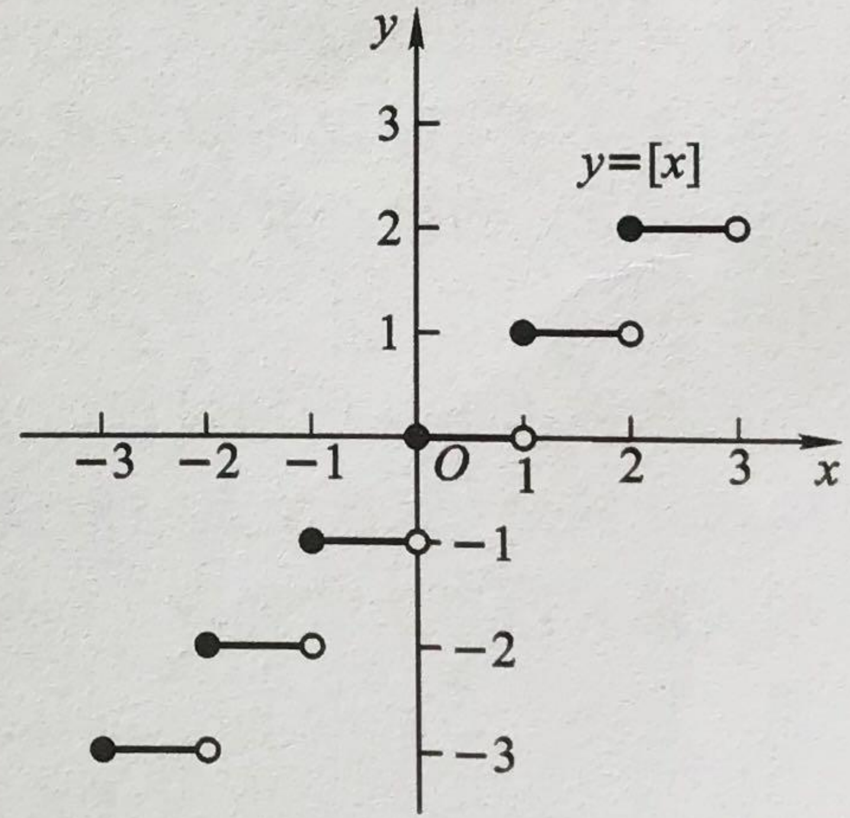
$[\quad]$也是分段函数,它还可表示为

$$y=[x]=\begin{cases}\cdots & \cdots\\ 2, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\\ -1, & -1\leqslant x<0,\\ \cdots & \cdots\end{cases}$$

注意 1:$[-1.352]=-2$,$[-1.352]\neq-1$,因此不能说$[x]$为删去小数部分得到的整数.

取整函数 $y=[x]$ 的图像是由无穷多条与 x 轴平行的单位长线段组成的阶梯形,每一线段左端是实点,右端是空圈,见图 1.4.实点表示在图像上,空圈表示被排除在图像之外.

注意 2:分段函数是一个函数,不是几个函数.



趣味思考题

设函数z=f(x)对任意的x，y都有

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-2f(x)f(y)}$$

求f（0）的值

思路:
令x=0，y=0，则有

$$f(0)=\frac{f(0)+f(0)}{1-2f(0)f(0)}$$

解方程得到f（0）＝0

开始上课前说几件事情

- 保持联系：课程微信群、课程网页
- 课上互动：弹幕or直接发言
- 我的课不签到、不需要请假，但建议每次都来
- 随机点名？
- 作业、测验时间

1.1.2 由已知函数产生新函数

1. 函数的四则运算

例 1.1.6 给定函数：$f(x)=\sin x, x\in(-\infty,+\infty), g(x)=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$.

我们可以形成四个新的函数：

$$f(x)+g(x)=\sin x+\sqrt{x}, x\in[0,+\infty), f(x)-g(x)=\sin x-\sqrt{x}, x\in[0,+\infty),$$

$$f(x)\cdot g(x)=\sin x\cdot\sqrt{x}, x\in[0,+\infty), \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}, x\in(0,+\infty).$$

一般的

$$\left.\begin{cases} f(x), x\in D_f \\ g(x), x\in D_g \end{cases}\right\} \xRightarrow{\text{四则运算}} \begin{cases} f(x)+g(x), x\in D_f\cap D_g, \text{称为和函数}, \\ f(x)-g(x), x\in D_f\cap D_g, \text{称为差函数}, \\ f(x)\cdot g(x), x\in D_f\cap D_g, \text{称为积函数}, \\ \dfrac{f(x)}{g(x)}, x\in\{x\in D_f\cap D_g, \text{且 } g(x)\neq 0\}, \text{称为商函数}. \end{cases}$$

注 上面公式中出现的 $\in$、$\cap$ 分别是集合运算“属于”、“交”的符号.

2. 复合函数

例 1.1.7 从自变量 x 到函数 $\sin^2 x$ 的计算过程是：$x \stackrel{\sin}{\longmapsto} \sin x \stackrel{(\ )^2}{\longmapsto} \sin^2 x$. 若令 $z=\sin x$，则

$$x \stackrel{\sin}{\longmapsto} z \stackrel{(\ )^2}{\longmapsto} y.$$

z 起了自变量 x 到因变量 y 的过渡作用，称为中间变量. 我们说 y 是函数 sin 与 $(\ )^2$ 的复合函数. 记作

$$(\ )^2 \circ \sin : x \longmapsto y.$$

定义 给定函数 $f:\begin{cases} X \to Z, \\ x \longmapsto z, \end{cases}$ $g:\begin{cases} Z \to Y, \\ z \longmapsto y, \end{cases}$ 则 f 与 g 的**复合函数**是

$$g \circ f:\begin{cases} X \to Y, \\ x \longmapsto y, \end{cases}$$

即 $y=g[f(x)], x \in X$，其中 $z=f(x)$ 称为**中间变量**.

注 并非任何两个函数都能复合. 例如

$$z=f(x)=3x+2, D_f=\mathbf{R}, \text{而函数} f(x) \text{的值域}: R_f=\mathbf{R},$$

$$y=g(z)=\sqrt{z}, D_g=[0,+\infty).$$

如果函数 $f(x)$ 和 $g(z)$ 复合, 对 $x<-\dfrac{2}{3}$, $z=3x+2<0$, $\sqrt{z}$无定义, 因此 f 与 g 不能复合. 只有 $R_f\subset D_g$ 时, f 与 g 才能复合. 如果 $R_f\not\subset D_g$, 为了形成复合函数, 必须缩小 f 的定义域, 使其值域相应的缩小, 以至满足上述要求. 具体操作是反向的.

例如, 为求复合函数 $y=\sqrt{3x+2}: x\overset{f}{\longmapsto} z=3x+2 \overset{g}{\longmapsto} y=\sqrt{z}=\sqrt{3x+2}$的定义域, 可先求出 $D_g=[0,+\infty)$, 再由 $z\in D_g$, 即 $3x+2\geqslant 0$ 解得 $x\geqslant -\dfrac{2}{3}$. 即函数 $y=\sqrt{3x+2}$的定义域是$\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

单选题 1分

设置

设$f(x)=\dfrac{1-x}{x}$, $g(x)=1+x$, 求$f[g(x)]$

A $\dfrac{x}{1+x}$

B $\dfrac{1}{x}$

C $\dfrac{-x}{1+x}$

D $\dfrac{1}{1+x}$

提交

例 1.1.9　设 $f(x-a)=x(x-a)$，求 $f(x)$.

解　由于 $x\mapsto x-a\mapsto f(x-a)$，令 $z=x-a$，即 $x=z+a$，得

$$f(z)=f(x-a)=x(x-a)=(z+a)z.$$

再将上式中的 z 换成 x，即得 $f(x)=x(x+a)$.

上述方法称为**变量代换**，通过 $z=x-a$ 将 x 换成 z，然后解出结果.

单选题 1分

设$f(\frac{1}{x})=(\frac{x+1}{x})^2$，求f(x)

A $(1+x)^2$

B $(1+\frac{1}{x})^2$

C $(\frac{1}{1+x})^2$

D $(\frac{x}{x+1})^2$

提交

3. 反函数

现在研究指数函数 $y=2^x$ 与对数函数 $y=\log_2 x$ 的关系:

$$f:\begin{cases}\mathbf{R}\to(0,+\infty),\\ x\mapsto 2^x,\end{cases}\qquad g:\begin{cases}(0,+\infty)\to\mathbf{R},\\ x\mapsto\log_2 x.\end{cases}$$

注　这里函数 f 是定义域 $D_f=\mathbf{R}$ 到值域 $R_f=(0,+\infty)$ 上的一一对应,即对每个 $x=x_0\in D_f$,有唯一的 $y_0=2^{x_0}\in R_f$ 与 x_0对应,不同的 x 对应着不同的函数值 $y=2^x$. 反之,对每个 $y_0\in R_f$,也有唯一的 $x_0\in D_f$ 使得 $2^{x_0}=y_0$. 一一对应在几何上表现为:每一水平直线 $y=y_0\in R_f$ 与函数图像 $y=2^x$ 相交于唯一的点(x_0,y_0),其中 $y_0=2^{x_0}$.

由此把 x_0 称为以 2 为底 y_0 的**对数**,记作 $x_0=\log_2 y_0$. 当 y 取遍 R_f 的值,就得对数函数

$$g:\begin{cases}(0,+\infty)\to\mathbf{R},\\ y\mapsto\log_2 y.\end{cases}$$

按传统习惯,用 x 表示自变量,y 表示因变量. 因此写成

$$g:\begin{cases}(0,+\infty)\to\mathbf{R},\\ x\mapsto\log_2 x\end{cases}$$

把 g 称为 f 的反函数,往往写成 $g=f^{-1}$.

当然,指数函数 $y=2^x,x\in\mathbf{R}$ 也是对数函数 $y=\log_2 x,x\in(0,+\infty)$ 的反函数.

定义　设函数$f:\begin{cases}X\to Y,\\ x\mapsto y\end{cases}$是一一对应,即对每一 $x\in X$,按对应规律 f 有唯一的 $y\in Y$ 与之对应,反之,每一 $y\in Y$,也有唯一的 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$. 由此,我们把反过来的对应称为 f 的**反函数**,记作

$$f^{-1}:\begin{cases}Y\to X,\\ y\mapsto x.\end{cases}$$

当然,f 也是 f^{-1} 的反函数. 按传统习惯,用 x 表示自变量,y 表示因变量. 因此 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$,$x\in R_f$.

现把 $y=f(x)$ 及其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像画在同一直角坐标系里

(以 $y=2^x$ 与 $y=\log_2 x$ 为例),如图 1.5 所示.

由于 $(x,y)\in\Gamma_f\Leftrightarrow y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)\Leftrightarrow(y,x)\in\Gamma_{f^{-1}}$. 因此,互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

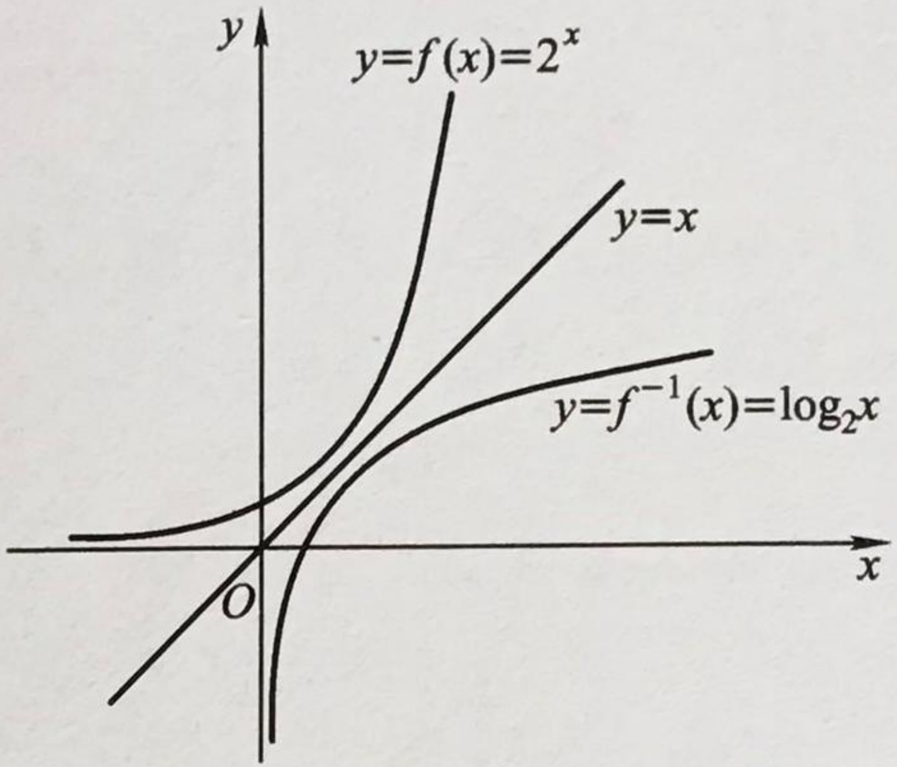


图 1.5

例 1.1.10 考虑函数 $y=\sin x, x\in\mathbf{R}$,其值域是 $[-1,1]$. 此函数不是一一对应. 例如,有无穷多个

$$x=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}$$

使得 $\sin x=0.5$.

为构造出反函数，需要把定义域缩小成 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. 于是函数 $f:\begin{cases}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1], \\ x\mapsto \sin x\end{cases}$ 为一一对应(图 1.6)，可得到 f 的反函数(图 1.7)

$$f^{-1}=\arcsin:\begin{cases}[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \\ x\mapsto \arcsin x.\end{cases}$$

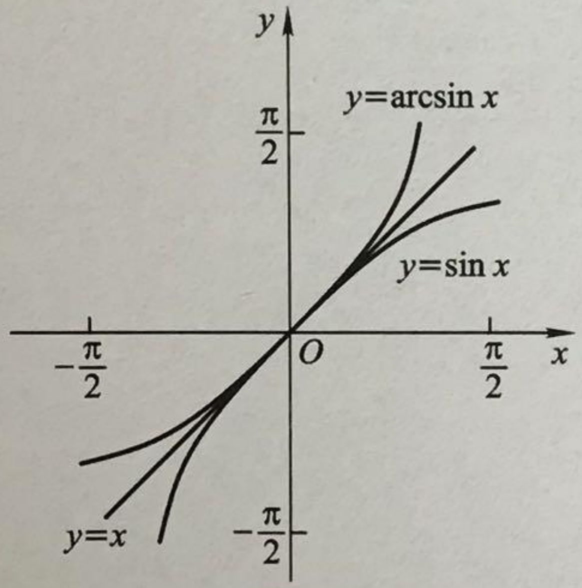


图 1.6

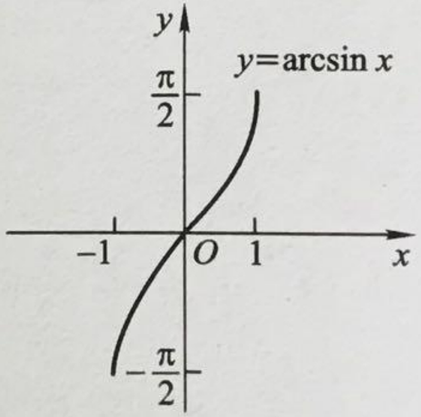


图 1.7

同理有

$$\begin{cases}[0,\pi]\to[-1,1],\\ x\mapsto\cos x,\end{cases}\qquad \begin{cases}\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R},\\ x\mapsto\tan x,\end{cases}\qquad \begin{cases}(0,\pi)\to\mathbf{R},\\ x\mapsto\cot x\end{cases}$$

的反函数,它们分别是

$$\arccos:\begin{cases}[-1,1]\to[0,\pi],\\ x\mapsto\arccos x,\end{cases}\qquad \arctan:\begin{cases}\mathbf{R}\to\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\\ x\mapsto\arctan x,\end{cases}\qquad \operatorname{arccot}:\begin{cases}\mathbf{R}\to(0,\pi),\\ x\mapsto\operatorname{arccot} x,\end{cases}$$

其图像分别如图 1.8,图 1.9,图 1.10 所示.

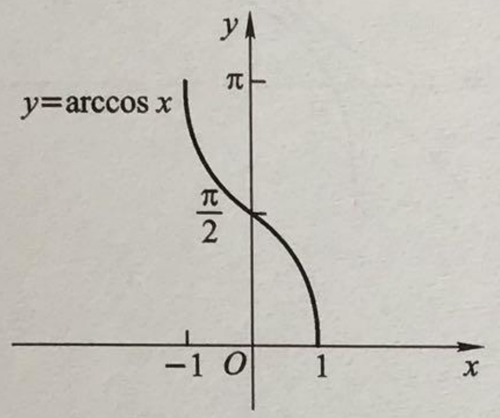


图 1.8

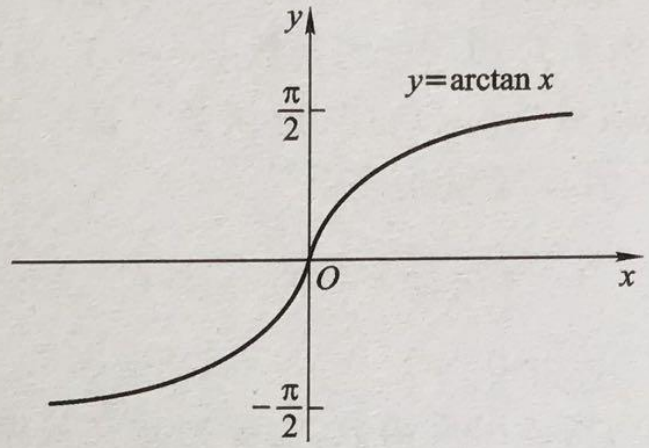


图 1.9

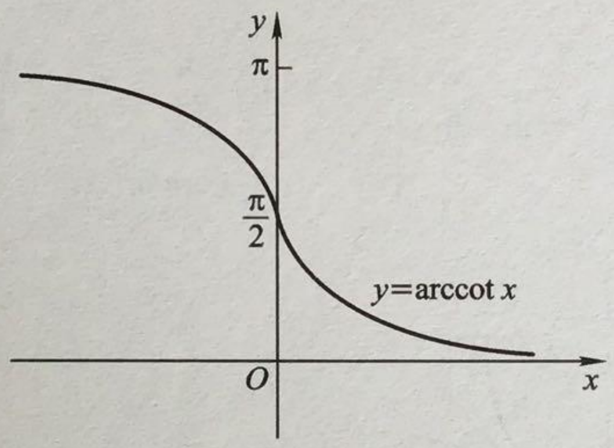


图 1.10

下表中列出的函数称为基本初等函数:

名　称		表 达 式	定 义 域
常数函数		$y=c$	$x\in\mathbf{R}$
幂函数		$y=x^{\mu}$,μ 可为任意非零实数	随 μ 而定
指数函数		$y=a^{x}, a>0,\quad a\neq 1$	$x\in\mathbf{R}$
对数函数		$y=\log_a x, a>0,\quad a\neq 1$	$x\in(0,+\infty)$
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$x\in\mathbf{R}$
	余弦函数	$y=\cos x$	$x\in\mathbf{R}$
	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+0.5\pi,\quad k\in\mathbf{Z}$
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}$
	正割函数	$y=\sec x$	$x\neq k\pi+0.5\pi,\quad k\in\mathbf{Z}$
	余割函数	$y=\csc x$	$x\neq k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}$
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$
	反正切函数	$y=\arctan x$	$x\in\mathbf{R}$
	反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in\mathbf{R}$

定义　有限个基本初等函数通过有限次四则运算或复合得到的函数称为初等函数.

单选题 1分

设置

求函数y的定义域，$y=\frac{\lg(x+1)}{\sqrt{x-1}}$

A $[1, +\infty)$

B $(-1, +\infty)$

C $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$

D $(1, +\infty)$

提交

1.1.3 函数的性态

1. 函数的奇偶性

定义 设函数 $f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称，即 $x\in D_f \Leftrightarrow -x\in D_f$，

若 $f(-x)=f(x)$，$x\in D_f$，则称 f 为**偶函数**；

若 $f(-x)=-f(x)$，$x\in D_f$，则称 f 为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

两个偶函数之和、差、积与商仍是偶函数，两个奇函数之和、差仍是奇函数，两个奇函数之积与商是偶函数，奇函数与偶函数之积与商是奇函数.

例 1.1.13 判定函数 $y=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), x\in\mathbf{R}$ 是奇函数、偶函数、还是非奇非偶函数.

解 因

$$y(-x)=\log_a\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\log_a\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\log_a\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}=-\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-y(x).$$

故该函数是奇函数.

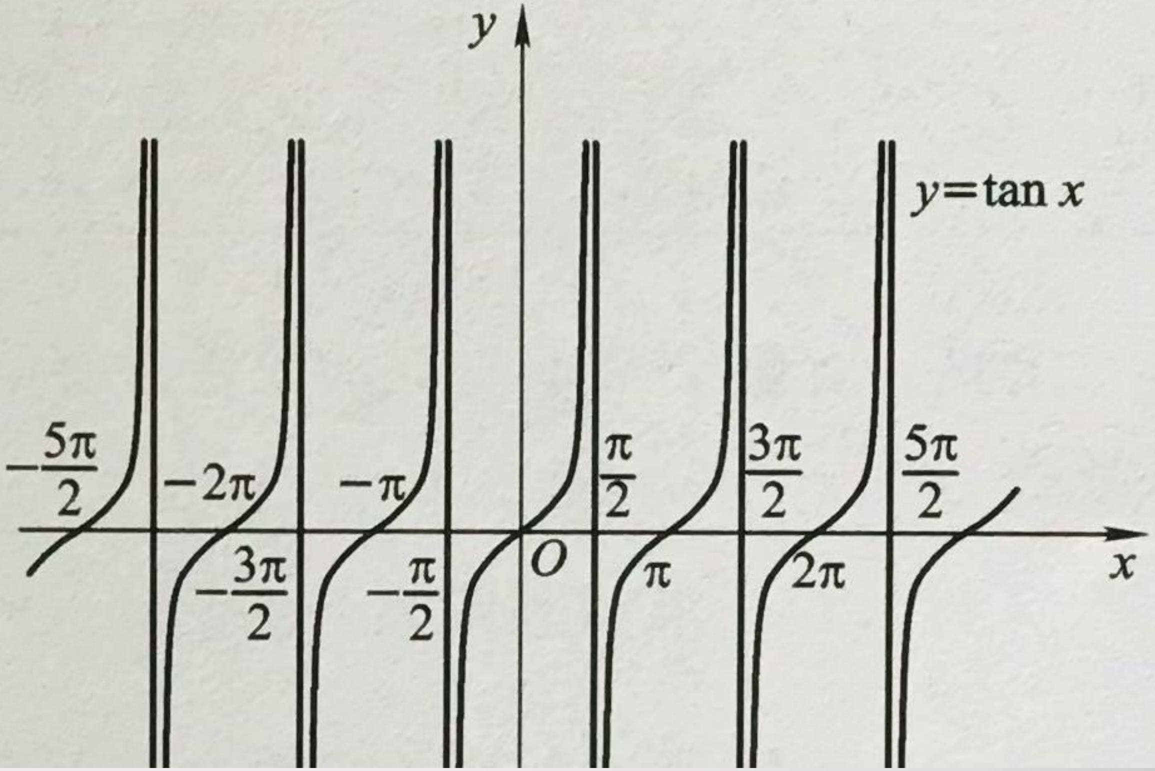
2. 函数的周期性

定义 给定函数 $f(x)$，$x\in D_f$，若存在常数 T 使得：1）$x\in D_f \Leftrightarrow x+T\in D_f$，2）$f(x+T)=f(x)$，$x\in D_f$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，满足上述条件的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的**周期**.

例：$\sin x$，$\cos x$，$\sec x$，$\csc x$ 是周期 2π 的函数，$\tan x$，$\cot x$ 是周期 π 的函数.

以 T 为周期的函数图像沿 x 轴方向左右平移 T 的整数倍数，图像将重合.

图 1.11 显示了 $\tan x$ 图像周期 π 的特性.



3. 函数的单调性

定义. 给定函数 f (x), $x \in D_f$，设 $(a, b) \subset D_f$，若对任意 $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$,

1）有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 单调增加；

2）有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 单调减少；

3）有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 单调不减；

4）有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 单调不增.

单调增加与单调减少分别简称为**递增**与**递减**.

例 1.1.14 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 递减，在 $[0,+\infty)$ 递增.

4. 函数的有界性

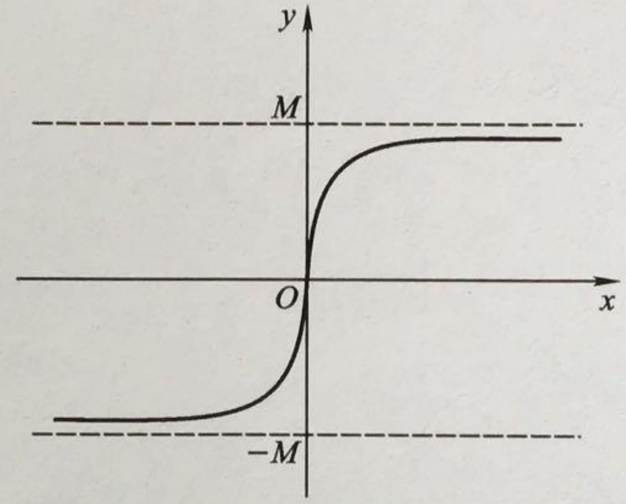
定义 给定函数 $f(x)$，$x\in D_f$，集合 $X\subset D_f$，若存在正数 M，使得

1）对任何 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X **有界**（图 1.12），否则称为无界.

2）对任何 $x\in X$，有 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X **有上界**（图 1.13），否则称为无上界.

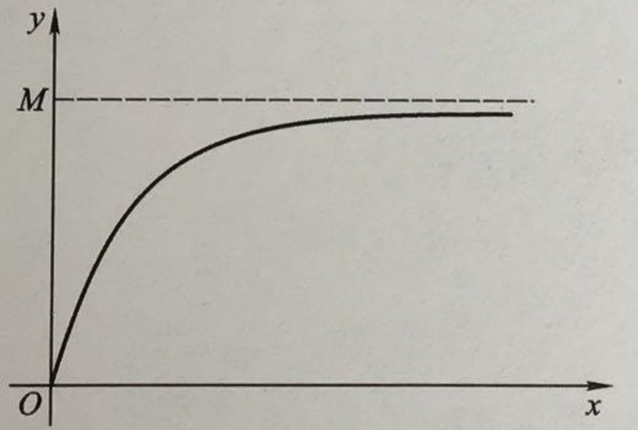
3）对任何 $x\in X$，有 $f(x)\geqslant -M$，则称 $f(x)$ 在 X **有下界**（图 1.14），否则称为无下界.

注 集合 X 可以是闭区间 $[a,b]$，开区间 (a,b)，也可以是半开半闭区间 $[a,b)$ 或 $(a,b]$.

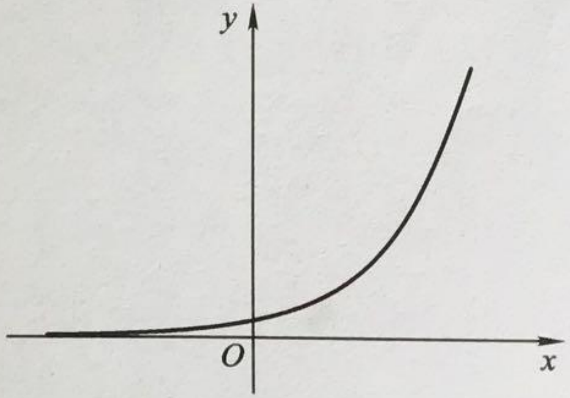


有界函数

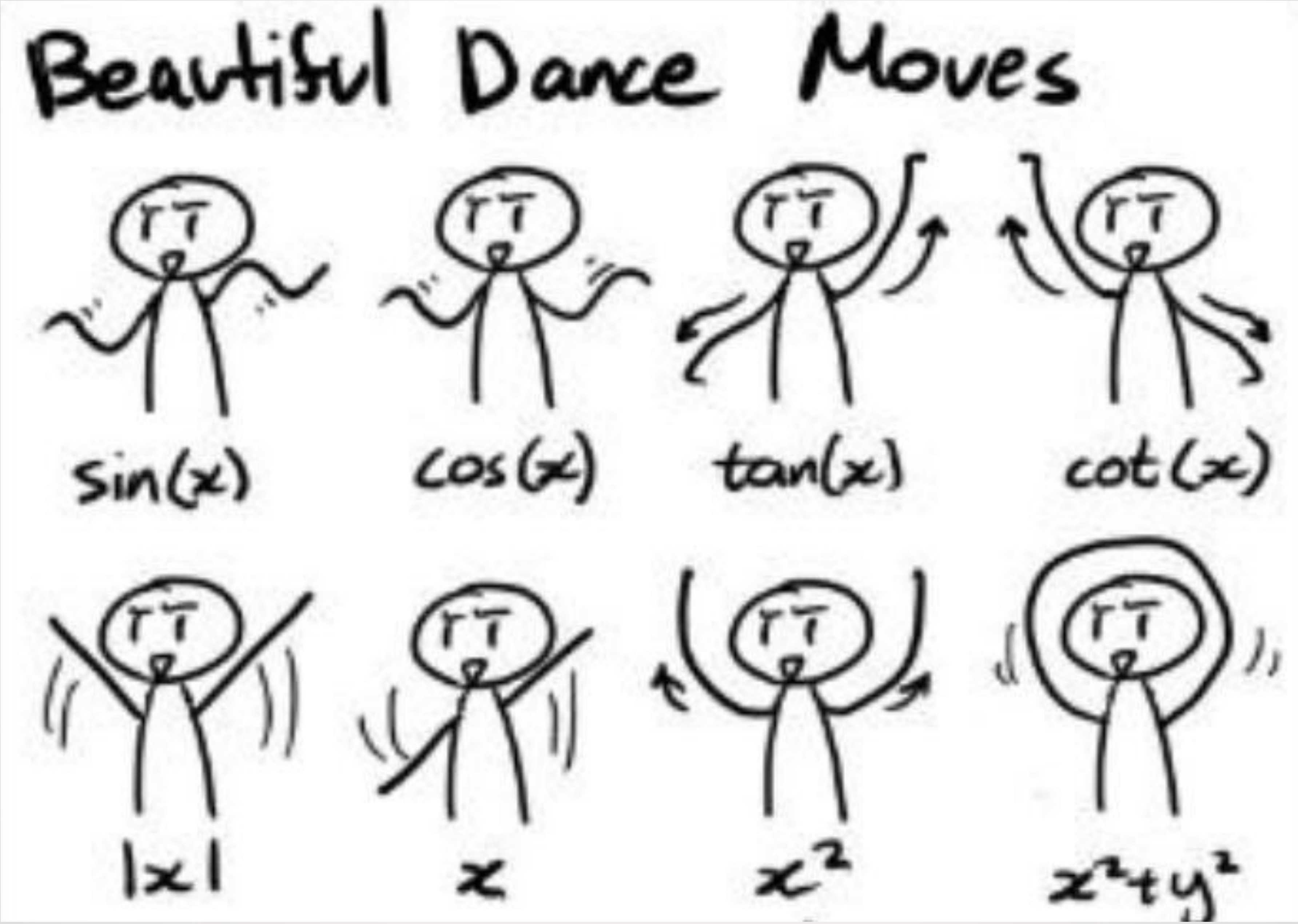
图 1. 12



有上界函数



有下界函数


Beautiful Dance Moves
sin(x)
cos(x)
tan(x)
cot(x)
|x|
x
x²
x²+y²